

N° D'ORDRE :

1293.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. C. POPOVICI,

Licencié ès Sciences.

1^{re} THÈSE. — SUR LES SURFACES INTÉGRALES COMMUNES
AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 27 mars 1908, devant la Commission d'examen.

MM. DARBOUX, *Président.*
GOURSAT, { *Examineurs.*
PAINLEVÉ, {

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1908

THESES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

II

PAR M. J. B. B.

Présentée à la Faculté des Sciences de Paris
pour l'obtention du grade de Docteur en Sciences

Le 15 Mars 1888

Par M. J. B. B.

Paris

Imprimerie de la Faculté des Sciences de Paris

1888

1888

1888

N° D'ORDRE :

1293.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. C. POPOVICI,

Licencié ès Sciences.

1^{re} THÈSE. — SUR LES SURFACES INTÉGRALES COMMUNES
AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 24 mars 1908, devant la Commission d'examen.



MM. DARBOUX, *Président.*
GOURSAT, *Examineurs.*
PAINLEVÉ, }

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1908

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	PAUL APPELL.....	Mécanique rationnelle.
DOYEN HONORAIRE	G. DARBOUX, professeur.	Géométrie supérieure.
	L. TROOST,	
PROFESSEURS HONORAIRES..	CH. WOLF.	
	RIBAN.	
	LIPPMANN	Physique.
	BOUTY.....	Physique.
	BOUSSINESQ.....	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	PICARD.....	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	H. POINCARÉ.....	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	YVES DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physio- logie comparée.
	G. BONNIER.....	Botanique.
	DASTRE.....	Physiologie.
	DITTE.....	Chimie.
	GIARD.....	Zoologie. Évolution des êtres organisés.
	KOENIGS.....	Mécanique physique et expé- rimentale.
	VÉLAIN.....	Géographie physique.
PROFESSEURS	GOURSAT.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CHATIN.....	Histologie.
	PELLAT.....	Physique.
	HALLER.....	Chimie organique.
	JOANNIS.....	Chimie (Enseignem ^t P. C. N.).
	P. JANET.....	Physique Id.
	WALLERANT.....	Minéralogie.
	ANDOYER.....	Astronomie physique.
	PAINLEVE.....	Mathématiques générales.
	HAUG.....	Géologie.
	TANNERY.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	RAFFY.....	Application de l'Analyse à la Géométrie.
	HOUSSAY.....	Zoologie.
	LE CHATELIER.....	Chimie.
	N.....	Chimie biologique.
	N.....	Zoologie, Anatomie, Physio- logie comparée.
	N.....	Physique.
	PUISEUX.....	Mécanique et Astronomie.
	LEDUC.....	Physique.
	HADAMARD.....	Calcul différentiel et intégral.
	MATRUCHOT.....	Botanique.
PROFESSEURS ADJOINTS.....	MICHEL.....	Minéralogie.
	DAGUILLON.....	Botanique.
	BOUVEAULT.....	Chimie organique.
	BOREL.....	Théorie des fonctions.
	PRUVOT.....	Anatomie comparée.
	CAULLERY.....	Zoologie (évolution des êtres organisés).
SECRÉTAIRE.....	A. GUILLET.	

A

MONSIEUR PAUL PAINLEVÉ,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

Hommage de reconnaissance et de dévouement.

A LA MÉMOIRE

DE

VASILE ADAMACHI.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554031_0065

A
MES PROFESSEURS DE ROUMANIE
ET
DE PARIS.

Hommage de respect et de reconnaissance.

PREMIÈRE THÈSE.

SUR LES

SURFACES INTÉGRALES COMMUNES

AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

INTRODUCTION.

Le Mémoire qui suit est une étude sur les intégrales communes des équations différentielles; par cela même il traite au fond une question de Géométrie. En effet, si deux (ou plusieurs équations) forment un système complet, il résulte que les congruences de caractéristiques de ces équations admettent des surfaces (ou multiplicités) communes. On peut étudier ces surfaces à deux points de vue : 1° d'après la manière dont on passe d'une surface intégrale commune à une autre; 2° d'après la manière dont sont distribuées sur chaque surface les caractéristiques des équations données; c'est-à-dire les intersections avec les surfaces intégrales non communes. Par rapport à cette étude, on peut poser trois questions : 1° reconnaître d'après les équations, avant de les intégrer même, les caractères des surfaces intégrales communes et des courbes tracées sur elles; 2° donner les moyens d'intégrer ces équations, dans le cas où cela est possible; 3° former les équations dont les intégrales et leurs caractéristiques jouissent des propriétés données, ce qui donne lieu à l'intégration des équations aux dérivées partielles *non linéaires* plus ou moins compliquées, et

c'est surtout à ce problème que nous avons prêté le plus d'attention. Parmi les différentes propriétés géométriques qui expriment le rapport entre les intégrales (surfaces et courbes considérées), nous avons pris en particulier celles qui correspondent au cas de la translation, des courbes conjuguées et de l'orthogonalité.

La première et la deuxième Partie s'occupent de l'intégration et de l'étude des intégrales du système non linéaire de $2(n-1)$ équations

$$A_1(u_1, \dots, u_{n-1}) \frac{\partial v_k}{\partial x_1} + \dots + A_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}) \frac{\partial v_k}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial v_k}{\partial x_n} = 0,$$

$$B_1(v_1, \dots, v_{n-1}) \frac{\partial u_k}{\partial v_1} + \dots + B_{n-1}(v_1, \dots, v_{n-1}) \frac{\partial u_k}{\partial v_{n-1}} + \frac{\partial u_k}{\partial v_n} = 0,$$

qui contient déjà une classe très générale des équations aux dérivées partielles (linéaires seulement par rapport aux dérivées des fonctions inconnues), et que nous sommes arrivé à intégrer.

Nous avons donné à cette question le nom d'*équations aux intégrales réciproques*; elle a été le point de départ de nos recherches.

Ces équations contiennent expressément le cas où les caractéristiques sont des courbes de translation sur les surfaces intégrales communes, et c'est justement l'observation de ce fait qui nous a conduit à étudier d'autres cas, qui feront l'objet de la troisième Partie.

Un exposé de la théorie des systèmes complets, sous une forme qui puisse s'adapter à des recherches de ce genre, était absolument nécessaire au commencement de cette Partie.

Pour terminer le problème de la translation, il restait encore un cas (qu'il faut distinguer de celui énoncé plus haut) où l'on passe d'une surface intégrale commune à une autre par un mouvement de translation et les différents cas qui peuvent être communs avec le premier, notamment celui où les équations aux intégrales réciproques se réduisent à $2(n-1)-p$ à cause de p liaisons qu'on se propose d'avoir entre les u ou les v . Nous avons aussi étudié le cas où les caractéristiques tracent sur les surfaces intégrales communes des courbes conjuguées. Comme les courbes de translation sont des courbes conjuguées, cette dernière Partie traite d'un problème plus général.

Nous avons appelé les équations non linéaires correspondantes

équations conjuguées et démontré qu'une combinaison linéaire de ces équations donne encore des équations conjuguées, à condition que les coefficients de la combinaison satisfassent à une certaine relation, qui a été désignée sous le nom d'*invariant conjugué*. On trouvera traité comme exemple d'intégration le cas où l'une des congruences doit représenter sur les surfaces intégrales communes des courbes de contact de cylindres différents.

Nous avons donné plus d'extension au problème posé dans la première Partie à cause de son intérêt, de son dualisme vraiment curieux et de ses rapports avec la théorie des groupes, que nous avons aperçus avant de connaître cette théorie. A la suite de longues recherches effectuées sur ce point, nous croyons que les propositions qui ont fait l'objet de ce travail sont nouvelles, ce qui porte à ces modestes essais plus d'intérêt que nous ne le pensions au commencement. Le cas de deux variables a été rencontré par M. Goursat. L'équation

$$(dy - u dx)(dy - v dx) = 0$$

dont les fonctions u et v satisfont aux équations

$$u v'_x + v'_y = 0, \quad v u'_x + u'_y = 0$$

présente cet intérêt remarquable qu'elle admet pour intégrale

$$(c - u)(c - v) = 0$$

(voir *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1895). Les fonctions u et v sont des intégrales d'une équation du second degré $zqr + s(q - pz) - tp = 0$ à caractéristiques intégrables (voir *Équations aux dérivées partielles du second ordre*, p. 146). Nous avons donné (*Bulletin de la Société mathématique*, 1907) des équations de la forme

$$\lambda(u, v) v'_x + v'_y = 0, \quad \mu(u, v) u'_x + u'_y = 0$$

qui peuvent s'intégrer en les réduisant à l'équation de Laplace, notamment celles qui se réduisent à l'équation d'Euler et Poisson. Pour le cas de trois variables, une difficulté s'ajoute, qu'il y a plus d'inconnues que de variables; c'est la théorie des systèmes complets qui nous a servi pour arriver à l'intégration.

Parmi les problèmes qui se rapportent aux transformations infini-

tésimales et qui ont été résolus dans la suite, on peut remarquer le suivant : *Trouver s'il existe des fonctions $A_1(u_1, \dots, u_{n-1}), \dots, A_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1})$ qui correspondent à des fonctions données quelconques $u_1(x_1, \dots, x_{n-1}), \dots, u_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$, de manière que toute expression de la forme $A_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \dots + A_{n-1} \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial F}{\partial x_n}$ soit une fonction de $u_1, \dots, u_{n-1}$, si F en est une.*

La deuxième Partie traite des applications des problèmes étudiés dans la première à la Mécanique et qui, en particulier, se rapportent aux deux questions suivantes : *Étant donné un système de fonctions $V_\lambda(x_1, \dots, x_n, t)$, vitesses d'un mouvement quelconque, reconnaître si ces vitesses peuvent être considérées comme résultant d'un mouvement inconnu, qui provient des forces fonctions uniquement des vitesses; trouver les trajectoires du mouvement.* Le deuxième problème est le suivant : *Étant donné un système de forces*

$$X_k(x_1, \dots, x_n, t),$$

reconnaître s'il existe un mouvement produit par des forces inconnues, fonctions de vitesses seulement, qui admette avec le premier un faisceau (congruence) de trajectoires communes; trouver enfin ces trajectoires.

Nous avons considéré ensuite le cas où les forces ne sont pas indépendantes entre elles comme un cas particulier des équations aux intégrales réciproques.

M. Painlevé a bien voulu nous faire remarquer qu'il existe des cas bien particuliers il est vrai, mais où la méthode que nous avons donnée ne donne pas toutes les intégrales pour trouver les trajectoires. Cette méthode s'applique pour reconnaître si nous sommes dans le cas de forces fonctions des vitesses.

Nous espérons que ce premier et modeste Ouvrage sera suivi d'autres, et nous tenons à exprimer à M. Painlevé nos remerciements pour l'accueil favorable qu'il a fait à ce travail et les bons conseils qu'il nous a donnés.



PREMIÈRE PARTIE.

Sur les équations aux intégrales réciproques ⁽¹⁾.

I. Nous appellerons *équations aux intégrales réciproques* deux systèmes d'équations différentielles :

$$(1) \quad \frac{dx_1}{u_1} = \dots = \frac{dx_{n-1}}{u_{n-1}} = dx_n,$$

$$(2) \quad \frac{dx_1}{v_1} = \dots = \frac{dx_{n-1}}{v_{n-1}} = dx_n,$$

où

$$v_1, \dots, v_{n-1}$$

sont le système fondamental d'intégrales premières des équations (1) et

$$u_1, \dots, u_{n-1}$$

le système fondamental d'intégrales premières des équations (2).

Pour trouver un système de fonctions u et v satisfaisant à notre problème, nous devons intégrer le système de $2(n-1)$ équations aux

⁽¹⁾ Voir ma Note dans les *Comptes rendus*, 22 avril 1907, et le *Bulletin de la Société mathématique de France*, fasc. II, 1907.

dérivées partielles non linéaires suivantes :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 \frac{\partial v_k}{\partial x_1} + \dots + u_{n-1} \frac{\partial v_k}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial v_k}{\partial x_n} = 0, \\ v_1 \frac{\partial u_k}{\partial x_1} + \dots + v_{n-1} \frac{\partial u_k}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial u_k}{\partial x_n} = 0 \end{array} \right. \quad (k = 1, \dots, n-1).$$

Je vais démontrer d'abord que, quel que soit le procédé par lequel on obtienne un système de solutions, les $2(n-1)$ relations finies qui les définissent sont toujours réductibles à la forme

$$(4) \quad x_k = F_k(u_1, \dots, u_{n-1}) + \Phi_k(v_1, \dots, v_{n-1}) \quad (k = 1, \dots, n),$$

$$(5) \quad \lambda_j(u_1, \dots, u_{n-1}) = \mu_j(v_1, \dots, v_{n-1}) \quad (j = 2, \dots, n-1).$$

Nous arriverons à ce résultat même par des conclusions remarquables.

Considérons, tout d'abord, les deux équations linéaires suivantes :

$$(6) \quad U(z) = u_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + u_{n-1} \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

$$(7) \quad V(z) = v_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + v_{n-1} \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

$u_1, \dots, u_{n-1}; v_1, \dots, v_{n-1}$ étant des solutions supposées connues du problème.

Ces deux équations sont en involution.

En effet, on a

$$U[V(z)] - V[U(z)] = \sum_{k=1}^{n-1} [U(v_k) - V(u_k)] \frac{\partial z}{\partial x_k}.$$

Cette expression est identiquement nulle en vertu des équations (3).

Il résulte, d'après la théorie de Jacobi et Mayer, que les équations $U(z) = 0$ et $V(z) = 0$ admettent $n-2$ intégrales communes.

Les relations (5) sont déjà établies.

Une conséquence géométrique de ce dernier résultat, c'est que *les deux congruences de caractéristiques*

$$u_1 = a_1, \dots, u_{n-1} = a_{n-1}, \quad v_1 = b_1, \dots, v_{n-1} = b_{n-1}$$

admettent une famille de surfaces à deux dimensions communes :

$$(8) \quad k_2 = \lambda_2(u_1, \dots, u_{n-1}), \quad \dots, \quad k_{n-1} = \lambda_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}),$$

$$(9) \quad k_2 = \mu_2(v_1, \dots, v_{n-1}), \quad \dots, \quad k_{n-1} = \mu_{n-1}(v_1, \dots, v_{n-1}).$$

Ces surfaces dépendent de $n - 2$ paramètres $k_2, \dots, k_{n-1}$; nous les appellerons *surfaces intégrales communes*.

Voyons maintenant comment sont distribués sur chacune de ces surfaces les deux faisceaux de courbes u et v . Pour cela remarquons que, pendant un déplacement suivant une courbe $u_i = a_i$ caractéristique du système (2), toutes les courbes $v_i = b_i$ qui la rencontrent ont leurs tangentes parallèles aux points d'intersection; en outre, les cosinus directeurs de ces tangentes sont exprimés précisément par les nombres

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 + 1}}, \quad \dots, \quad \frac{a_{n-1}}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 + 1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 + 1}}.$$

Il en résulte que *les caractéristiques constituent deux faisceaux de courbes de translation sur chaque surface intégrale commune*; ces surfaces sont par conséquent des surfaces de translation et s'expriment par des relations de la forme

$$(10) \quad x_k = f_k(u; k_2, \dots, k_{n-1}) + \varphi_k(v; k_2, \dots, k_{n-1}) \\ (k = 1, \dots, n);$$

u désignera une fonction arbitraire de $u_1, \dots, u_{n-1}$ et v une fonction arbitraire de $v_1, \dots, v_{n-1}$; les paramètres $k_2, \dots, k_{n-1}$ seront les indices d'une telle surface dans l'espace à n dimensions.

Pour des valeurs constantes des $k_2, \dots, k_{n-1}$, les équations (8), (9) ou (10) nous représentent la même surface; en vertu de ces équations la famille de surfaces (10) peut s'exprimer sous la forme (4), (5).

où l'on a mis, pour abréger, $\frac{\partial F_i}{\partial u_k} = F_i^k$, etc.; $k = 1, \dots, n-1$,
 $j = 2, \dots, n-1$.

Pour que ces équations soient compatibles par rapport aux expressions $U(u_k)$ et $V(v_k)$, il faut que F_n et Φ_n soient des intégrales des équations linéaires

$$D = \begin{vmatrix} u_1 & F_1^1 & \dots & F_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n-1} & F_{n-1}^1 & \dots & F_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \frac{\partial F}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial F}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} v_1 & \Phi_1^1 & \dots & \Phi_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n-1} & \Phi_{n-1}^1 & \dots & \Phi_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial \Phi}{\partial v_{n-1}} \end{vmatrix} = 0,$$

où les fonctions $F_1, \dots, F_{n-1}$; $\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}$ peuvent être choisies à notre gré; ce sont des fonctions arbitraires de l'intégration; quant aux fonctions $\lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$; $\mu_2, \dots, \mu_{n-1}$, elles doivent être des intégrales des équations homogènes correspondantes,

$$D_0 = \begin{vmatrix} u_1 & F_1^1 & \dots & F_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n-1} & F_{n-1}^1 & \dots & F_{n-1}^{n-1} \\ 0 & \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \lambda}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_0 = \begin{vmatrix} v_1 & \Phi_1^1 & \dots & \Phi_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n-1} & \Phi_{n-1}^1 & \dots & \Phi_{n-1}^{n-1} \\ 0 & \frac{\partial \mu}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial \mu}{\partial v_{n-1}} \end{vmatrix} = 0.$$

Le problème est ainsi réduit à l'intégration de deux équations linéaires à $n-1$ variables D et Δ . On pourrait, par cette méthode, trouver une infinité d'intégrales des équations réciproques; mais nous allons voir qu'il n'est pas besoin d'intégrer aucune équation pour avoir des solutions satisfaisant à notre problème.

À cet effet, proposons-nous de résoudre le problème qui correspond à deux surfaces génératrices données d'avance,

$$x_n^1 = F(x_1^1, \dots, x_{n-1}^1); \quad x_n^2 = \Phi(x_1^2, \dots, x_{n-1}^2);$$

cela revient à se donner déjà une intégrale de chaque équation D et Δ .

On peut résoudre d'un seul coup le problème par rapport à un

groupe de $2(n-1)$ surfaces génératrices associées,

$$x_n^1 = F^i(x_1^1, \dots, x_{n-1}^1), \quad x_n^2 = \Phi^i(x_1^2, \dots, x_{n-1}^2) \\ (i = 1, \dots, n-1),$$

c'est-à-dire en se donnant d'avance $n-1$ intégrales des équations D et Δ , et chercher les fonctions $F_k(u_1, \dots, u_{n-1})$, $\Phi_k(v_1, \dots, v_{n-1})$, ou, en d'autres termes, la représentation paramétrique de ces surfaces qui correspond à notre problème.

En prenant comme variables $x_1^1, \dots, x_n^1$ et $x_1^2, \dots, x_n^2$, les équations D et Δ peuvent s'écrire ⁽¹⁾

$$\left(u_1 \frac{\partial F}{\partial x_1^1} + \dots + u_{n-1} \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}^1} + 1 \right) \frac{D(F_1, \dots, F_{n-1})}{D(u_1, \dots, u_{n-1})} = 0, \\ \left(v_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1^2} + \dots + v_{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-1}^2} + 1 \right) \frac{D(\Phi_2, \dots, \Phi_{n-1})}{D(v_1, \dots, v_{n-1})} = 0;$$

comme $F_1, \dots, F_{n-1}$; $\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}$ désignent des variables indépendantes, on obtient, en exprimant que F^i et Φ^i sont des intégrales, les équations

$$\left. \begin{aligned} (13) \quad & u_1 \frac{\partial F^i}{\partial x_1^1} + \dots + u_{n-1} \frac{\partial F^i}{\partial x_{n-1}^1} + 1 = 0 \\ (14) \quad & v_1 \frac{\partial \Phi^i}{\partial x_1^2} + \dots + v_{n-1} \frac{\partial \Phi^i}{\partial x_{n-1}^2} + 1 = 0 \end{aligned} \right\} (i = 1, \dots, n-1).$$

Ces équations nous donnent $u_1, \dots, u_{n-1}$ et $v_1, \dots, v_{n-1}$ en fonction des x_k^1 et x_k^2 ; mais si l'on veut avoir le problème résolu par rapport aux deux surfaces génératrices,

$$x_n^1 = F^i(x_1^1, \dots, x_{n-1}^1), \quad x_n^2 = \Phi^i(x_1^2, \dots, x_{n-1}^2),$$

les équations (13), (14) et ces deux dernières nous donnent $x_1^1, \dots, x_n^1$

(1) En effet, on a

$$D = u_1 \frac{D(F_2, \dots, F_{n-1}, F)}{D(u_1, \dots, u_{n-1})} + \dots + u_{n-1} \frac{D(F_1, \dots, F_{n-2}, F)}{D(u_1, \dots, u_{n-1})} + \frac{D(F_1, \dots, F_{n-1})}{D(u_1, \dots, u_{n-1})} \\ = \left(u_1 \frac{\partial F}{\partial F_1} + \dots + u_{n-1} \frac{\partial F}{\partial F_{n-1}} + 1 \right) \frac{D(F_1, \dots, F_{n-1})}{D(u_1, \dots, u_{n-1})},$$

et $x_1^2, \dots, x_n^2$; c'est-à-dire $F_1, \dots, F_n$ et $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ en fonction de $u_1, \dots, u_{n-1}$ et $v_1, \dots, v_{n-1}$.

Quant aux fonctions $\lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$; $\mu_2, \dots, \mu_{n-1}$, ce sont des intégrales des équations

$$u_1 \frac{\partial \lambda}{\partial x_1^2} + \dots + u_{n-1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_{n-1}^2} = 0, \quad v_1 \frac{\partial \mu}{\partial x_1^2} + \dots + v_{n-1} \frac{\partial \mu}{\partial x_{n-1}^2} = 0;$$

par suite, les λ et μ seront des fonctions des expressions $F^i - F^k$ et $\Phi^i - \Phi^k$ que l'on a exprimées en fonction de u et v . On aura, par suite, comme intégrales communes les relations

$$L_j(F^1 - F^2, \dots, F^1 - F^{n-1}) = M_j(\Phi^1 - \Phi^2, \dots, \Phi^1 - \Phi^{n-1}) \\ (j = 2, \dots, n-1),$$

où les fonctions L_j et M_j peuvent être choisies arbitrairement; ce fait exprime que nous sommes libres de choisir, à notre gré, la correspondance entre les courbes des deux surfaces génératrices par rapport auxquelles on se propose d'exprimer les intégrales.

III. Considérons le système d'équations non linéaires suivantes :

$$(3)' \quad \begin{cases} A(u_k) = A_1(u_1, \dots, u_{n-1}) \frac{\partial v_k}{\partial x_1} + \dots + A_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}) \frac{\partial v_k}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial v_k}{\partial x_n} = 0, \\ B(v_k) = B_1(v_1, \dots, v_{n-1}) \frac{\partial u_k}{\partial x_1} + \dots + B_{n-1}(v_1, \dots, v_{n-1}) \frac{\partial u_k}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial u_k}{\partial x_n} = 0 \end{cases} \\ (k = 1, \dots, n-1),$$

les fonctions données $A_1, \dots, A_{n-1}$; $B_1, \dots, B_{n-1}$ étant supposées distinctes.

Ce système peut aussi s'intégrer par les méthodes données précédemment. On peut d'ailleurs le réduire à la même forme que les équations (3), en prenant comme inconnues les expressions A et B , et ainsi l'on arrive au système de $2(n-1)$ équations

$$A(B_k) = 0, \quad B(A_k) = 0.$$

Les fonctions u et v jouissent des mêmes propriétés générales que les intégrales des équations (3), à savoir : elles peuvent se déterminer

sans aucune quadrature; les équations linéaires

$$A(z) = A_1(u_1, \dots, u_{n-1}) \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + A_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}) \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

$$B(z) = B_1(v_1, \dots, v_{n-1}) \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + B_{n-1}(v_1, \dots, v_{n-1}) \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

sont en involution; les deux congruences de caractéristiques u et v admettent une famille de surfaces intégrales communes, sur lesquelles les deux faisceaux de courbes u et v sont des courbes de translation.

Les intégrales se présentent sous la même forme (4), (5); en leur appliquant les opérations A et B , on obtient les équations

$$(11)' \quad \begin{cases} A_i = \sum_k F_i^k A(u_k), \\ 0 = \sum_k \lambda_j^k A(u_k), \end{cases}$$

$$(12)' \quad \begin{cases} B_i = \sum_k \Phi_i^k B(v_k), \\ 0 = \sum_k \mu_j^k B(v_k), \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = 1, \dots, n, \\ A_n = B_n = 1, \\ j = 2, \dots, n-1. \end{cases}$$

Les fonctions F et Φ sont déterminées par les équations

$$D = \begin{vmatrix} A_1 & F_1^1 & \dots & F_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n-1} & F_{n-1}^1 & \dots & F_{n-1}^{n-1} \\ 1 & F_n^1 & \dots & F_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} B_1 & \Phi_1^1 & \dots & \Phi_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n-1} & \Phi_{n-1}^1 & \dots & \Phi_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \Phi_n^1 & \dots & \Phi_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

et les fonctions λ et μ par les équations homogènes correspondantes.

Une propriété géométrique intéressante est la suivante :

Il existe un ensemble de points formant une courbe suivant lesquels les deux congruences de caractéristiques se raccordent.

Cette courbe est donnée par les équations

$$\begin{aligned} A_1(u_1, \dots, u_{n-1}) &= B_1(v_1, \dots, v_{n-1}), \quad \dots, \\ A_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}) &= B_{n-1}(v_1, \dots, v_{n-1}). \end{aligned}$$

Cet ensemble peut constituer même une surface à p dimensions si p de ces équations se trouvent parmi les $n - 2$ intégrales communes des équations $A(z)$ et $B(z)$, ou plus généralement si les équations de notre courbe se réduisent seulement à $n - p - 1$ équations distinctes, en vertu des $n - 2$ relations qui constituent les intégrales communes. Si une caractéristique u traverse cet espace en un point $x_1^0, \dots, x_n^0$, la caractéristique v , qui passe par ce même point, le traverse aussi avec la même tangente. Si la caractéristique u contient un arc entier situé dans cet espace, toutes les caractéristiques v qui la rencontrent en un point de cet arc auront une portion commune avec la caractéristique u qui sera constituée par cet arc dans toute sa longueur.

Les équations réciproques et la théorie des groupes.

Les intégrales des équations réciproques jouissent de belles propriétés au point de vue de la théorie des groupes que nous allons diviser en deux catégories :

1° Groupes d'opérations qui transforment un système donné d'intégrales en un nouveau système d'intégrales des mêmes équations linéaires;

2° Groupes qui transforment un système d'intégrales en un nouveau système appartenant aux équations non linéaires.

Cette dernière propriété nous permettra de déduire d'un système de solutions connues une infinité de solutions dépendant des fonctions arbitraires.

Nous allons démontrer, en outre, que ces opérations forment un groupe, non seulement au point de vue de transformer les intégrales les unes dans les autres, mais que le produit de plusieurs opérations peut être remplacé par une seule. On obtient, par ces transformations, des intégrales appartenant à un même groupe.

I. Considérons le système général de $2(n - 1)$ équations (3)'. De

ces équations nous avons déduit les équations (11)' et (12)' qui, résolues par rapport aux expressions $A(u_k)$ et $B(v_k)$, nous donnent des relations de la forme

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1(u_1, \dots, u_{n-1}) \frac{\partial u_k}{\partial x_1} + \dots + A_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}) \frac{\partial u_k}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \\ \quad = a_k(u_1, \dots, u_{n-1}), \\ B_1(v_1, \dots, v_{n-1}) \frac{\partial v_k}{\partial x_1} + \dots + B_{n-1}(v_1, \dots, v_{n-1}) \frac{\partial v_k}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial v_k}{\partial x_n} \\ \quad = b_k(v_1, \dots, v_{n-1}). \end{array} \right.$$

Ces relations expriment que les fonctions $u_1, \dots, u_{n-1}, v_1, \dots, v_{n-1}$ forment un groupe par rapport aux opérations $A(z)$ et $B(z)$.

Toutes les fonctions $F(u_1, \dots, u_{n-1})$, $\Phi(v_1, \dots, v_{n-1})$ font partie du groupe. Quelle que soit une fonction $H(u_1, \dots, u_{n-1})$, il existe une fonction $F(u_1, \dots, u_{n-1})$ qui donne

$$A[F(u_1, \dots, u_{n-1})] = H(u_1, \dots, u_{n-1}).$$

On n'a qu'à chercher une intégrale de l'équation

$$a_1(u_1, \dots, u_{n-1}) \frac{\partial F}{\partial u_1} + \dots + a_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}) \frac{\partial F}{\partial u_{n-1}} = H(u_1, \dots, u_{n-1}).$$

Pour $H = 0$ on obtient les intégrales communes des équations $A(z)$ et $B(z)$. Si nous répétons sur $a_k(u_1, \dots, u_{n-1})$ et $b_k(v_1, \dots, v_{n-1})$ les opérations $A(z)$ et $B(z)$, nous obtenons évidemment des intégrales des mêmes équations linéaires $B(z) = 0$ et $A(z) = 0$.

Il est intéressant de démontrer directement cette propriété que les fonctions u et v forment un groupe.

A cet effet, remarquons que, les équations linéaires étant en involution, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} A[B(u_k)] - B[A(u_k)] &= 0 \\ A[B(v_k)] - B[A(v_k)] &= 0 \end{aligned} \quad (k = 1, \dots, n-1).$$

Or, comme on a

$$A(v_k) = 0, \quad B(u_k) = 0,$$

il en résulte

$$B[A(u_k)] = 0, \quad A[B(v_k)] = 0.$$

Donc les expressions $A(u_k)$ sont encore des intégrales de l'équation $B(z) = 0$ et $B(v_k)$ des intégrales de l'équation $A(z) = 0$. Il s'ensuit que l'on aura

$$A(u_k) = a_k(u_1, \dots, u_{n-1}), \quad B(v_k) = b_k(v_1, \dots, v_{n-1}).$$

Ces intégrales ne forment pas toujours des systèmes fondamentaux, les fonctions a_k et b_k n'étant pas nécessairement distinctes.

II. Nous sommes en possession d'un nouveau moyen d'intégrer le système (3)'. Remarquons, en effet, que notre problème se réduit à l'intégration du système (1) qui a l'avantage sur le précédent d'être séparé par rapport aux inconnues $u_1, \dots, u_{n-1}$, d'une part, et $v_1, \dots, v_{n-1}$, de l'autre.

Les $2(n-1)$ équations non homogènes (1) sont en réalité des *intégrales intermédiaires* du système (3)' et les fonctions $a_1, \dots, a_{n-1}$, $b_1, \dots, b_{n-1}$ sont des fonctions arbitraires de l'intégration.

Pour trouver les fonctions $u_1, \dots, u_{n-1}$, nous sommes conduits à considérer le système de caractéristiques suivant :

$$(2) \quad \frac{dx_1}{A_1} = \dots = \frac{dx_{n-1}}{A_{n-1}} = dx_n = \frac{du_1}{a_1} = \dots = \frac{du_{n-1}}{a_{n-1}}.$$

Désignons les $n-2$ intégrales des dernières $n-2$ équations caractéristiques par

$$(3) \quad u_2 = \lambda^2(u_1; k_2, \dots, k_{n-1}), \quad \dots, \quad u_{n-1} = \lambda^{n-1}(u_1; k_2, \dots, k_{n-1}).$$

Remplaçons dans $a_1, A_1, \dots, A_{n-1}$ les expressions $u_2, \dots, u_{n-1}$ par ces valeurs et désignons par $a_1^k, A_1^k, \dots, A_{n-1}^k$ les expressions ainsi obtenues.

Considérons enfin les intégrales

$$I_1 = \int \frac{A_1^k du_1}{a_1^k}, \quad \dots, \quad I_{n-1} = \int \frac{A_{n-1}^k du_1}{a_1^k}, \quad I_n = \int \frac{du_1}{a_1^k},$$

P.

Les fonctions $u_1, \dots, u_{n-1}$ intégrales des équations

$$A(u_k) = a_k(u_1, \dots, u_{n-1})$$

seront données par des équations de la forme

$$(4) \quad \begin{cases} \Pi_k[x_1 - I_1(u_1, \dots, u_{n-1}), \dots, x_n - I_n(u_1, \dots, u_{n-1}), \\ \lambda_2(u_1, \dots, u_{n-1}), \dots, \lambda_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1})] = 0 \\ (k = 1, \dots, n-1), \end{cases}$$

où $\lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ sont les valeurs de $k_2, \dots, k_{n-1}$ tirées des équations (3); on suppose également que l'on ait remplacé dans les intégrales effectuées $I_1, \dots, I_n$ les expressions $k_2, \dots, k_{n-1}$ par ces valeurs. Quant aux fonctions Π_k , elles sont arbitraires tant que les fonctions $b_k(v_1, \dots, v_{n-1})$ ne sont pas données; autrement elles dépendent exclusivement de la forme de ces fonctions.

Pour une détermination des fonctions $u_1, \dots, u_{n-1}$, la deuxième série d'intégrales $v_1, \dots, v_{n-1}$ sera donnée par les relations

$$(5) \quad \frac{B_1(v_1, \dots, v_{n-1})}{D(u_1, \dots, u_{n-1})} = \dots = \frac{B_{n-1}(v_1, \dots, v_{n-1})}{D(u_1, \dots, u_{n-1})} = \frac{1}{\frac{D(u_1, \dots, u_{n-1})}{D(x_1, \dots, x_{n-1})}}.$$

III. Pour justifier notre méthode il faut démontrer que les fonctions $v_1, \dots, v_{n-1}$ sont en réalité des intégrales de l'équation $A(z) = 0$, et cela quelles que soient les fonctions $a_1, \dots, a_{n-1}$, dont nous avons affirmé, sans le démontrer, que l'on est libre de les prendre arbitraires.

Cela va résulter du théorème suivant, plus général, qui contient la réciproque de ce que nous venons d'établir et qui est très remarquable par son dualisme :

Si les fonctions $u_1, \dots, u_{n-1}$ forment un groupe par rapport à l'opération

$$U(z) = u_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + u_{n-1} \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial z}{\partial x_n},$$

alors :

1° Les fonctions

$$v_k = \frac{\Delta(u, x_k)}{\Delta(u, x_{n-1})}, \quad \left[\Delta(u, x_k) = \frac{D(u_1, \dots, u_{n-1})}{D(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)} \right]$$

$$(k = 1, \dots, n-1)$$

forment aussi un groupe par rapport à l'opération

$$V(z) = v_1 \frac{dz}{dx_1} + \dots + v_{n-1} \frac{dz}{dx_{n-1}} + \frac{dz}{dx_n}.$$

2° Les deux groupes de fonctions $u_1, \dots, u_{n-1}, v_1, \dots, v_{n-1}$ admettent un sous-groupe d'ordre $n-2$ commun.

3° Les équations $U(z) = 0$ et $V(z) = 0$ sont en involution.

4° Chacune de ces équations admet $n-2$ intégrales fonctions de ses coefficients, et ces intégrales sont justement les solutions communes des équations considérées.

5° Les fonctions $u_1, \dots, u_{n-1}$ sont les intégrales de l'équation $V(z) = 0$, et $v_1, \dots, v_{n-1}$ les intégrales de l'équation $U(z) = 0$.

Considérons l'expression

$$U[V(z)] - V[U(z)] = H(z).$$

On a, par hypothèse,

$$U(u_k) = a_k(u_1, \dots, u_{n-1})$$

et

$$V(u_k) = 0$$

par la définition même des fonctions v .

Il en résulte

$$H(u_k) = 0.$$

Or

$$H(z) = \sum [U(v_k) - V(u_k)] \frac{dz}{dx_k}.$$

On aura donc les $n-1$ équations

$$U(v_1) \frac{du_1}{dx_1} + \dots + U(v_{n-1}) \frac{du_{n-1}}{dx_{n-1}} = 0.$$

On suppose

$$\frac{D(u_1, \dots, u_{n-1})}{D(x_1, \dots, x_{n-1})} \neq 0,$$

car autrement les quantités $v_1, \dots, v_{n-1}$ seraient infinies.

Il s'ensuit que l'on aura forcément

$$U(v_1) = 0, \quad \dots, \quad U(v_{n-1}) = 0.$$

La dernière partie de notre théorème est démontrée.

Il en résulte que l'on aura $H(z) = 0$. Donc $U(z)$ et $V(z)$ forment un système en involution, ce qui donne

$$U[V(v_k)] - V[U(v_k)] = 0.$$

Or

$$U(v_k) = 0.$$

Donc

$$V(v_k) = b_k(v_1, \dots, v_{n-1}).$$

Les fonctions v forment aussi un groupe par rapport à l'opération $V(z)$.

Enfin, on voit aisément que les $n-2$ intégrales de chacune des équations

$$a_1(u_1, \dots, u_{n-1}) \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} + \dots + a_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}) \frac{\partial \lambda}{\partial u_{n-1}} = 0,$$

$$b_1(v_1, \dots, v_{n-1}) \frac{\partial \mu}{\partial v_1} + \dots + b_{n-1}(v_1, \dots, v_{n-1}) \frac{\partial \mu}{\partial v_{n-1}} = 0$$

sont des intégrales communes des équations $U(z) = 0$, $V(z) = 0$ et fonctions des coefficients mêmes de ces équations.

Ces conclusions subsistent aussi dans le cas où les fonctions $u_1, \dots, u_{n-1}$ forment un groupe par rapport à une opération $A(z)$.

IV. Ce théorème nous impose logiquement le problème suivant :

Étant donné un système de fonctions $u_1, \dots, u_{n-1}$, reconnaître s'il existe un système de fonctions

$$A_1(u_1, \dots, u_{n-1}), \quad \dots, \quad A_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1})$$

telles que les fonctions $u_1, \dots, u_{n-1}$ forment un groupe par rapport à l'opération

$$A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + A_{n-1} \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

Pour trouver si ces fonctions existent, remarquons que les fonctions

$$v_k = \frac{\Delta(u, x_k)}{\Delta(u, x_{n-1})}$$

doivent être, dans ce cas, les intégrales de l'équation $A(z) = 0$.

Supposons que ces fonctions soient distinctes. Alors, les fonctions

$$\begin{aligned} A_1(u_1, \dots, u_{n-1}) &= A_1(x_1, \dots, x_n), & \dots, \\ A_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}) &= A_{n-1}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

seront données par les équations

$$A_k(x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{\Delta(v, x_k)}{\Delta(v, x_{n-1})}$$

et ces fonctions elles-mêmes seront les intégrales de l'équation

$$V(z) = 0.$$

Ainsi, il existe un système de fonctions $A_1(u_1, \dots, u_{n-1}), \dots, A_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1})$ de la nature indiquée, si les identités

$$\begin{aligned} A_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial v_k}{\partial x_1} + \dots + A_{n-1}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial v_k}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial v_k}{\partial x_n} &= 0 \\ (k = 1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

sont vérifiées.

Le problème se réduit donc à la vérification des identités *rationnelles* par rapport aux expressions données $u_1, \dots, u_{n-1}$.

Enfin, si dans les expressions $A_1(x_1, \dots, x_n), \dots, A_{n-1}(x_1, \dots, x_n)$ on prend comme variables $u_1, \dots, u_{n-1}, x_n$, la variable x_n disparaîtra et l'on aura les fonctions cherchées $A_1, \dots, A_{n-1}$ en fonction de $u_1, \dots, u_{n-1}$, dans le cas où nous avons appris qu'elles existent.

V. Dans le cas particulier où le nombre des variables est pair, soit $2n$, et où l'expression

$$A_1 dx_{2n} - A_2 dx_{2n-1} + \dots + A_{2n-1} dx_2 - dx_1$$

admet un facteur intégrant, nous tombons sur des groupes de Lie.

Désignons par u l'intégrale que l'on obtient avec un facteur intégrant. On a les parenthèses de Poisson :

$$\begin{aligned} (uv_i) &= 0 & (i &= 1, \dots, 2n-1), \\ (v_i v_k) &= b_{i,k}(v_1, \dots, v_{2n-1}) & (i, k &= 1, \dots, 2n-1). \end{aligned}$$

D'après le théorème fondamental de Lie, le système d'équations

$$(v_1 z) = 0, \quad \dots, \quad (v_{2n-1} z) = 0$$

doit être en involution. On voit bien que u est l'intégrale commune.

Remarquons que u doit être une fonction de $v_1, \dots, v_{2n-1}$, car on a

$$(uu) \equiv 0.$$

VI. Nous allons résoudre maintenant le problème suivant :

Étant donné un système de fonctions $u_1, \dots, u_{n-1}$ satisfaisant aux relations

$$\begin{aligned} A_1(u_1, \dots, u_{n-1}) \frac{\partial u_k}{\partial x_1} + \dots \\ + A_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}) \frac{\partial u_k}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial u_k}{\partial x_n} = a_k(u_1, \dots, u_{n-1}), \end{aligned}$$

trouver les surfaces de translation (surfaces génératrices et surfaces intégrales communes) qui correspondent à ces fonctions.

On se propose de trouver la solution du problème sous la forme

$$\begin{aligned} x_i &= F_i(u_1, \dots, u_{n-1}) + \Phi_i(v_1, \dots, v_{n-1}), \\ \lambda_j(u_1, \dots, u_{n-1}) &= \mu_j(v_1, \dots, v_{n-1}). \end{aligned}$$

D'après les équations connues (11)', on voit que les fonctions F_i

sont respectivement des intégrales des équations

$$a_1 \frac{\partial F_i}{\partial u_1} + \dots + a_{n-1} \frac{\partial F_i}{\partial u_{n-1}} = A_i$$

et les fonctions λ_j des intégrales de l'équation

$$a_1 \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} + \dots + a_{n-1} \frac{\partial \lambda}{\partial u_{n-1}} = 0.$$

Ces intégrales ne peuvent pas être prises arbitrairement; elles dépendent de la forme sous laquelle on nous donne les fonctions $u_1, \dots, u_{n-1}$.

Supposons que ces fonctions soient données sous la forme (4). On peut considérer ces équations comme le résultat de l'élimination de $v_1, \dots, v_{n-1}$ entre les équations

$$\Phi_i = x_i - F_i, \quad \mu_j = \lambda_j.$$

Alors, on prendra (1)

$$F_i(u_1, \dots, u_{n-1}) = I_i(u_1, \dots, u_{n-1}).$$

Pour achever le problème, on exprimera Φ_i et μ_j en fonction de $x_1, \dots, x_n$ à l'aide des fonctions connues $u_1, \dots, u_{n-1}$. On déduira $x_1, \dots, x_{n-1}$ à l'aide des formules (5) en fonction de x_n ; $v_1, \dots, v_{n-1}$, et en remplaçant dans Φ_i et μ_j la variable x_n disparaîtra et nous aurons enfin ces dernières expressions en fonction de $v_1, \dots, v_{n-1}$.

VII. Les intégrales des équations non linéaires jouissent encore des propriétés remarquables, au point de vue de la transformation, d'un

(1) Cette détermination n'est pas la seule possible, car on peut mettre les équations (4) sous la forme

$$\pi_i^h [x_1 - I_1 - h_2(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}), \dots, x_n - I_n - \lambda_n(\lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}); \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}] = 0 \\ (i = 1, \dots, n-1);$$

mais les surfaces intégrales communes seront toujours les mêmes, car elles sont déterminées avec la congruence de courbes $u_1, \dots, u_{n-1}$.

système d'intégrales en un nouveau système. Ce dernier ne correspondra plus aux mêmes équations linéaires.

Voici ces propriétés :

1° Si le système de $2(n-1)$ fonctions

$$\begin{aligned} u_1(x_1, \dots, x_n), \quad \dots, \quad u_{n-1}(x_1, \dots, x_n), \\ v_1(x_1, \dots, x_n), \quad \dots, \quad v_{n-1}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

constitue un système d'intégrales des équations réciproques, les fonctions

$$\begin{aligned} u_1(\rho x_1 + \xi_1, \dots, \rho x_n + \xi_n), \quad \dots, \quad u_{n-1}(\rho x_1 + \xi_1, \dots, \rho x_n + \xi_n), \\ v_1(\rho x_1 + \xi_1, \dots, \rho x_n + \xi_n), \quad \dots, \quad v_{n-1}(\rho x_1 + \xi_1, \dots, \rho x_n + \xi_n), \end{aligned}$$

$\rho, \xi_1, \dots, \xi_n$ étant des constantes, nous donneront un nouveau système d'intégrales des équations réciproques.

Il suffit de regarder la forme des équations différentielles (3) ou (3)' pour voir que les nouvelles fonctions sont aussi des intégrales si les premières le sont.

Nous exprimerons cette propriété en disant que *les intégrales des équations réciproques admettent comme groupe de transformations l'homothétie et la translation*. Nous avons ainsi déduit du système connu d'intégrales un nouveau système dépendant de $n+1$ constantes arbitraires.

On voit bien que ces transformations forment un groupe par rapport à elles-mêmes; p transformations successives d'indices $\rho^1; \xi_1^1, \dots, \xi_n^1; \dots, \rho^p; \xi_1^p, \dots, \xi_n^p$ sont équivalentes à la transformation unique dont les indices sont

$$\begin{aligned} \rho^p \rho^{p-1} \dots \rho^1; \quad \xi_1^p + \rho^p \xi_1^{p-1} + \dots + \rho^p \rho^{p-1} \dots \rho^2 \xi_1^1, \quad \dots, \\ \xi_n^p + \rho^p \xi_n^{p-1} + \dots + \rho^p \rho^{p-1} \dots \rho^2 \xi_n^1. \end{aligned}$$

2° Si les fonctions $u_1(x_1, \dots, x_n)$, etc., sont un système connu d'intégrales des équations non linéaires et les fonctions

$$k_2(x_1, \dots, x_n), \quad \dots, \quad k_{n-1}(x_1, \dots, x_n)$$

sont les intégrales communes des équations linéaires correspondantes, alors on obtient, par la substitution,

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho(K_2, \dots, K_{n-1})X_1 + \xi_1(K_2, \dots, K_{n-1}) \\ &\dots \dots \dots [K_i(x_1, \dots, x_n) = k_i(X_1, \dots, X_n)], \\ x_n &= \rho(K_2, \dots, K_{n-1})X_n + \xi_n(K_2, \dots, K_{n-1}) \end{aligned}$$

un nouveau système d'intégrales, quelles que soient les fonctions arbitraires $\rho; \xi_1, \dots, \xi_n$.

Les nouvelles fonctions $K_i(x_1, \dots, x_n)$ seront aussi les intégrales communes.

Pour démontrer cette propriété générale, nous allons désigner par $U(\bar{z})$ une opération U effectuée sur une fonction z dans laquelle on considère les fonctions $k_2, \dots, k_{n-1}$ comme des constantes; c'est-à-dire la variation U de z , qui correspond à un déplacement suivant une surface intégrale commune. Désignons par U_i et V_i ce que deviennent u_i et v_i après la substitution.

Nous allons démontrer les relations

$$U(V_i) = U_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial V_i}{\partial x_1} + \dots + U_{n-1}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial V_i}{\partial x_n} + \frac{\partial V_i}{\partial x_n} = 0.$$

En effet,

$$U(V_i) = U(\bar{V}_i) + \sum_p \frac{\partial V_i}{\partial K_p} U(K_p).$$

En vertu de la première propriété, on a $U(\bar{V}_i) = 0$. Il nous reste à démontrer que l'on a $U(K_p) = 0$. Remarquons que, par hypothèse,

$$U_1 \frac{\partial K}{\partial X_1} + \dots + U_{n-1} \frac{\partial K}{\partial X_{n-1}} + \frac{\partial K}{\partial X_n} = 0.$$

Désignons par $\bar{U}(K)$ une telle opération. Nous aurons

$$\begin{aligned} 0 = \bar{U}(K) &= \sum_i U_i \sum_r \frac{\partial K}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial X_i} \quad i, r = 1, \dots, \quad U_n = 1, \\ \frac{\partial x_r}{\partial X_i} &= X_r \frac{\partial \rho}{\partial X_i} + \frac{\partial \xi_r}{\partial X_i}, \\ \frac{\partial x_i}{\partial X_i} &= X_i \frac{\partial \rho}{\partial X_i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial X_i} + \rho. \end{aligned}$$

Il résulte

$$0 = \rho U(K) + \sum_r \frac{\partial K}{\partial x_r} [\Lambda_r U(\rho) + \bar{U}(\xi_r)].$$

On a, par hypothèse,

$$\bar{U}(\rho) = \bar{U}(\xi_r) = 0;$$

donc

$$U(K) = 0.$$

Nous avons ainsi démontré que les nouvelles fonctions sont aussi des intégrales et que les intégrales communes s'obtiennent par la même substitution.

Nous dirons que *les intégrales des équations réciproques admettent comme groupe de transformations une homothétie et une translation variable arbitrairement, quand on passe d'une surface intégrale commune à une autre.*

Nous obtenons ainsi le moyen de *déduire d'un système d'intégrales connues une infinité d'autres dépendant de $n + 1$ fonctions arbitraires à $n - 2$ variables.*

En répétant ces opérations, il paraît possible d'obtenir des intégrales dépendant d'une infinité de fonctions arbitraires; mais en réalité, comme nous allons le voir, il ne reste que $n + 1$ fonctions distinctes.

Cela résulte de l'interprétation géométrique. En effet, répéter ces opérations revient à transformer plusieurs fois les caractéristiques par homothétie et translation; après p opérations de cette nature, on peut revenir aux caractéristiques primitives par une homothétie et une translation résultantes; ces résultantes ne seront pas les mêmes que pour les caractéristiques qui se trouvaient sur la même surface intégrale commune. On aura ainsi des nouvelles solutions, et les intégrales communes se transforment en des nouvelles.

Les surfaces génératrices subissent des transformations plus complètes; ainsi une surface développable se transforme en une surface réglée si les droites étaient des caractéristiques.

Nous avons donc établi que non seulement les intégrales forment un

groupe par rapport aux transformations (x) , mais que ces transformations forment un groupe par rapport à elles-mêmes.

Pour trouver la fonction d'homothétie ρ et les fonctions de translation ξ_i résultantes, désignons par $X_1^1, \dots, X_n^1, \dots, X_1^p, \dots, X_n^p$ les points successivement transformés; par $K_j^i(x_1, \dots, x_n)$ les fonctions $k_j(X_1^i, \dots, X_n^i)$ et par $\rho^i(K^i); \xi_1^i(K^i), \dots, \xi_n^i(K^i)$ les fonctions

$$\rho^i(k_2, \dots, k_{n-1}); \quad \xi_1^i(k_2, \dots, k_{n-1}), \quad \dots, \quad \xi_n^i(k_2, \dots, k_{n-1}).$$

On aura facilement

$$\begin{aligned} \rho(x_1, \dots, x_n) &= \rho^p(K^p) \dots \rho^1(K^1), \\ \xi_r(x_1, \dots, x_n) &= \xi_r^p(K^p) + \rho^p(K^p) \xi_r^{p-1}(K^{p-1}) + \dots \\ &\quad + \rho^p(K^p) \dots \rho^2(K^2) \xi_r^1(K^1). \end{aligned}$$

Il est intéressant d'étudier ce qui arrive quand ces opérations se répètent à l'infini. Pour que le résultat final ait un sens, il faut que les expressions $\rho; \xi_1, \dots, \xi_n$ admettent une limite et, pour cela, il suffit que les expressions

$$\rho^1 \rho^2 \dots \rho^p; \quad \xi_1^1 + \xi_1^2 + \dots + \xi_1^p, \quad \dots, \quad \xi_n^1 + \xi_n^2 + \dots + \xi_n^p$$

soient uniformément convergentes.

DEUXIÈME PARTIE.

Applications des équations aux intégrales réciproques à la Mécanique.

I. Nous avons vu les propriétés dont jouissent les intégrales des équations réciproques au point de vue de la Géométrie et à celui de la théorie des groupes. Ces propriétés ont des interprétations mécaniques très intéressantes; elles nous permettent de traiter une question générale de la Dynamique. C'est le cas du mouvement produit par des forces fonctions de vitesses.

Ce cas prend même un intérêt particulier par ses rapports avec les

Si la loi du mouvement est fonction de vitesses, on aura

$$(3) \quad V(v_1) = L_1(v_1, \dots, v_n), \quad \dots, \quad V(v_n) = L_n(v_1, \dots, v_n),$$

ou en d'autres termes, quelles que soient les expressions des vitesses, elles forment un groupe par rapport à l'opération $V(z)$.

Nous avons vu dans la première Partie de cette étude que toutes les fois qu'un système de fonctions $v_1, \dots, v_n$ constitue un groupe par rapport à l'opération $V(z)$, le système d'équations

$$\frac{dx_1}{v_1} = \dots = \frac{dx_n}{v_n} = dt$$

admet un second système d'équations aux intégrales réciproques; c'est-à-dire qu'il existe un système de fonctions $u_1, \dots, u_n$, uniques et déterminées, telles que le système

$$\frac{dx_1}{u_1} = \dots = \frac{dx_n}{u_n} = dt$$

admet pour intégrales $v_1, \dots, v_n$, et le système primitif admet pour intégrales $u_1, \dots, u_n$.

Il s'ensuit de ces faits que *les expressions les plus générales des vitesses, résultant d'un mouvement produit par des forces fonctions des vitesses, sont des solutions des équations aux intégrales réciproques.*

En d'autres termes, les fonctions $v_1, \dots, v_n$ seront des intégrales des équations

$$(4) \quad \begin{cases} u_1 \frac{\partial v_k}{\partial x_1} + \dots + u_n \frac{\partial v_k}{\partial x_n} + \frac{\partial v_k}{\partial t} = 0, \\ v_1 \frac{\partial u_k}{\partial x_1} + \dots + v_n \frac{\partial u_k}{\partial x_n} + \frac{\partial u_k}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Les fonctions $u_1, \dots, u_n$ seront aussi des vitesses qui correspondent à un mouvement défini par des équations de la forme

$$\frac{dx_1}{u_1} = \dots = \frac{dx_n}{u_n} = dt = \frac{dv_1}{M_1} = \dots = \frac{dv_n}{M_n},$$

$M_1, \dots, M_n$ étant des fonctions des vitesses $u_1, \dots, u_n$.

L'inverse du théorème énoncé plus haut est exact seulement pour les intégrales des équations réciproques de la forme simple (4).

Les intégrales des équations réciproques plus générales peuvent être considérées comme des forces fonctions des vitesses ou des trajectoires qui leur correspondent.

Les trajectoires seront données par les intégrales des équations

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1(x_1, \dots, x_n, t), \dots, \frac{dx_n}{dt} = v_n(x_1, \dots, x_n, t).$$

Nous allons voir qu'elles se trouvent sans aucune quadrature. Pour plus de précision, proposons-nous le problème suivant :

Étant donné un système de fonctions

$$v_1(x_1, \dots, x_n, t), \dots, v_n(x_1, \dots, x_n, t),$$

vitesses d'un mouvement quelconque.

1° *Reconnaître si ces vitesses peuvent être considérées comme résultant d'un mouvement équivalent, où les forces sont des fonctions uniquement des vitesses;*

2° *Trouver l'expression générale des trajectoires du mouvement;*

3° *Trouver la loi de forces en fonction des vitesses du mouvement équivalent.*

La première et la deuxième partie se résolvent d'un seul coup.

Il faut vérifier que les expressions

$$(5) \quad u_1 = \frac{\Delta(v, x_1)}{\Delta(v, t)}, \dots, u_n = \frac{\Delta(v, x_n)}{\Delta(v, t)},$$

où l'on a mis

$$\Delta(v, x_i) = \frac{D(v_1, \dots, v_n)}{D(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, t)},$$

sont des intégrales de l'équation linéaire

$$v_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + v_n \frac{\partial z}{\partial x_n} + \frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

admet n intégrales intermédiaires de la forme

$$X_i(x_1, \dots, x_n, t) = L_i\left(\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}\right).$$

Nous allons voir ce fait curieux que, si le système d'équations données admet n intégrales intermédiaires de la forme indiquée, ces intégrales ne contiennent aucune fonction arbitraire; c'est-à-dire les fonctions $L_1, \dots, L_n$ seront parfaitement déterminées pour des fonctions $X_1, \dots, X_n$ données.

Remarquons que, s'il existe un système d'intégrales particulières

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1(x_1, \dots, x_n, t), \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = v_n(x_1, \dots, x_n, t),$$

$v_1, \dots, v_n$ étant des vitesses qui proviennent d'une loi de forces fonctions de vitesses, alors l'équation

$$v_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + v_n \frac{\partial z}{\partial x_n} + \frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

doit admettre comme intégrales les expressions

$$\frac{\Delta(v, x_k)}{\Delta(v, t)} = u_k.$$

Or, on a

$$\Delta(L, x_k) = \frac{D(L_1, \dots, L_n)}{D(v_1, \dots, v_n)} \Delta(v, x_k)$$

et

$$\Delta(L, x_k) = \Delta(X, x_k),$$

tout cela parce que le mouvement considéré dérive des forces $L_1, \dots, L_n$ fonctions de vitesses.

Nous avons déjà les trajectoires avant de connaître même la loi des forces; le faisceau de trajectoires cherché sera donné, dans le cas où le mouvement demandé existe, sans aucune quadrature par les équations

$$(8) \quad \frac{\Delta(X, x_k)}{\Delta(X, t)} = a_k \quad (k = 1, \dots, n).$$

Ces équations nous donnent les trajectoires et la loi du temps ; ces trajectoires forment une congruence.

Une conséquence intéressante est que, *si les expressions des forces* $X_1(x_1, \dots, x_n, t), \dots, X_n(x_1, \dots, x_n, t)$ *sont algébriques, les équations des trajectoires le seront aussi.*

Les fonctions u_k étant calculées, nous devons former maintenant les fonctions

$$(9) \quad \frac{\Delta(u, x_k)}{\Delta(u, t)} = \frac{\Delta^2(X, x_k)}{\Delta^2(X, t)} = v_k.$$

Si les fonctions $v_1, \dots, v_n$ *sont les intégrales de l'équation* $U(z) = 0$, *alors il existe un faisceau de trajectoires satisfaisant aux conditions demandées.*

En d'autres termes, notre problème se réduit à la vérification de n identités

$$(10) \quad \frac{\Delta(X, x_1)}{\Delta(X, t)} = \frac{\Delta^3(X, x_1)}{\Delta^3(X, t)}, \quad \dots, \quad \frac{\Delta(X, x_n)}{\Delta(X, t)} = \frac{\Delta^3(X, x_n)}{\Delta^3(X, t)}.$$

Ces égalités sont faciles à vérifier puisqu'elles sont rationnelles, par rapport aux fonctions données $X_1, \dots, X_n$.

Nous avons vu comment on trouve les trajectoires du mouvement ; pour avoir, maintenant, l'expression des forces fonctions de vitesses, nous prendrons dans les fonctions $X_1(x_1, \dots, x_n, t), \dots, X_n(x_1, \dots, x_n, t)$, comme variables, $v_1, \dots, v_n, t$. Après ce changement, la variable t disparaîtra et nous obtiendrons les fonctions $L_1(v_1, \dots, v_n), \dots, L_n(v_1, \dots, v_n)$; ces fonctions seront ainsi complètement déterminées et nous aurons ce théorème :

Un système d'équations du second ordre (1) qui définissent le mouvement d'un point libre ne peut admettre un système d'intégrales intermédiaires de la forme

$$X_k(x_1, \dots, x_n, t) = L_k\left(\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}\right),$$

dépendant de fonctions ou de constantes arbitraires.

Au contraire, pour des fonctions $L_1(\varphi_1, \dots, \varphi_n), \dots, L_n(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ données exprimant une loi de forces quelconque, il existe une infinité de fonctions $X_1(x_1, \dots, x_n, t), \dots, X_n(x_1, \dots, x_n, t)$ exprimant une loi de forces qui donne des trajectoires communes avec les premières.

Si l'on regarde les égalités (10) comme des équations différentielles par rapport aux fonctions $X_1, \dots, X_n$, on voit que les expressions des forces *qui donnent une congruence de trajectoires communes avec des trajectoires résultant des forces fonctions de vitesses sont des intégrales des équations du troisième ordre* (10).

Ce système d'équations admet un système d'intégrales intermédiaires

$$B_1(X_1, \dots, X_n) = \frac{\Delta^2(X, x_k)}{\Delta^2(X, t)}, \quad \dots, \quad B_n(X_1, \dots, X_n) = \frac{\Delta^2(X, x_k)}{\Delta^2(X, t)},$$

$B_1, \dots, B_n$ étant des fonctions arbitraires.

Ces équations du second ordre, nous savons les intégrer; ce sont les équations aux intégrales réciproques suivantes :

$$B_1(X_1, \dots, X_n) \frac{\partial u_k}{\partial x_1} + \dots + B_n(X_1, \dots, X_n) \frac{\partial u_k}{\partial x_n} + \frac{\partial u_k}{\partial t} = 0,$$

$$u_1 \frac{\partial X_k}{\partial x_1} + \dots + u_n \frac{\partial X_k}{\partial x_n} + \frac{\partial X_k}{\partial t} = 0,$$

dont nous avons donné plus haut les méthodes d'intégration. Les fonctions $B_1, \dots, B_n$ seront les vitesses du mouvement.

En somme, nous nous trouvons en présence de deux mouvements U et V réciproques et tous deux produits par des forces fonctions de vitesses. Leurs trajectoires considérées dans l'espace $x_1, \dots, x_n, t$ admettent une famille de surfaces communes. Les fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ainsi que $u_1, \dots, u_n$ jouissent de cette propriété, qu'on peut s'arranger par des liaisons dépendant d'un paramètre de telle façon qu'elles laissent invariantes n formes différentielles qui sont les équations intrinsèques des trajectoires.

Ce fait se traduit en Mécanique par le suivant : qu'on peut s'ar-

ranger par $n - 1$ conditions initiales pour que toutes les trajectoires soient identiques.

IV. Je dois à M. Painlevé la remarque suivante : Il peut arriver que les expressions que nous avons désignées dans un problème par $\frac{\Delta(v, x_k)}{\Delta(v, t)}$ et par $\frac{\Delta^2(X, x_k)}{\Delta^2(X, t)}$ dans l'autre problème *ne soient pas toutes indépendantes*.

Dans tous les cas, *la méthode* que nous avons donnée pour reconnaître si les vitesses v peuvent être considérées comme provenant des forces fonctions des vitesses, ou si les forces X admettent un faisceau de trajectoires communes avec un pareil mouvement, *est applicable* ; mais, quand il s'agit de l'intégration, on en connaît autant d'intégrales qu'il y a d'indépendantes parmi les expressions citées.

S'il y a j indépendantes, la recherche des trajectoires se réduit à l'intégration d'un système de $n - j$ équations.

Malgré que l'on connaît une transformation infinitésimale qui est l'équation du mouvement réciproque, en remplaçant dans cette forme linéaire les intégrales connues, on ne pourrait pas obtenir des intégrales nouvelles, mais encore des fonctions des intégrales connues. On peut profiter d'une intégrale commune pour avoir un facteur intégrant. Ainsi, par exemple, considérons l'équation

$$V(u) = v_1 \frac{\partial u}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

et supposons qu'on ait

$$\frac{\Delta(v, x)}{\Delta(v, t)} = \varphi \left[\frac{\Delta(v, x)}{\Delta(v, t)} \right],$$

c'est-à-dire $u_2 = \varphi(u_1)$. Les v_1 et v_2 seront bien des vitesses provenant des forces fonctions des vitesses si l'équation $V(u_1) = 0$ est vérifiée ; mais on n'en connaît qu'une intégrale. Pour trouver l'autre, nous

pouvons profiter de ce que nous avons établi que l'opérateur

$$U(\quad) = u_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_1(u_1) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

doit être une transformation infinitésimale de notre équation. Alors substituons dans U la fonction u_1 ; on peut faire trois hypothèses :

1° L'expression $V(u_1) = r(x, y, z)$ est distincte de u_1 , et alors cette expression nous donnera la deuxième intégrale cherchée; mais ce cas ne peut pas arriver.

2° $U(u_1) = f(u_1)$; dans ce cas, nous serons conduits à chercher une seconde intégrale de l'équation donnée, de préférence la surface intégrale commune des deux mouvements réciproques.

3° $U(u_1) = 0$; alors prenons x, y et u comme variables, les équations $V(f)$ et $U(f)$ se transforment en deux équations à deux variables

$$a(x, y, u) \frac{\partial f}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$c(x, y, u) \frac{\partial f}{\partial x} + d(x, y, u) \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

et il résulte de la théorie des transformations infinitésimales que $\frac{1}{ad - bc}$ sera un facteur intégrant; la recherche de la deuxième intégrale se réduit alors à de simples quadratures.

Voici encore un cas qui a été donné par M. Painlevé. Supposons que u_1 et u_2 se réduisent à des constantes, alors on peut bien voir que $v_1 = \text{const.}$ et $v_2 = \text{const.}$ représentent des droites parallèles et qu'on a forcément

$$v_1 = V_1(ax + by + t, cx + dy + t),$$

$$v_2 = V_2(ax + by + t, cx + dy + t).$$

Dans ce cas, la recherche des intégrales de l'équation $V(f) = 0$ se réduit à l'intégration d'une équation à deux variables

$$(ax + by + t, cx + dy + t)$$

et une quadrature.

V. Nous allons prendre un exemple qui mettra en évidence toute cette symétrie de phénomènes.

Proposons-nous d'étudier le mouvement dont la loi de forces est

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{-x}{e^t - 1} = X,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{y}{e^{-t} + 1} = Y.$$

Nous allons trouver un faisceau de trajectoires dépendant de deux paramètres appartenant à ces équations, ce qui nous aidera à les intégrer complètement. Demandons-nous si elles admettent des trajectoires de translation.

Formons les expressions

$$u_1 = \frac{D(X, Y)}{D(y, z)} : \frac{D(X, Y)}{D(x, y)}, \quad u_2 = \frac{D(X, Y)}{D(z, x)} : \frac{D(X, Y)}{D(x, y)};$$

nous aurons

$$u_1 = \frac{x}{1 - e^{-t}}, \quad u_2 = \frac{-y}{1 + e^t};$$

nous avons trouvé déjà les trajectoires demandées si elles existent; formons enfin les expressions v_1 et v_2 en répétant encore une fois les mêmes opérations sur X et Y , nous aurons

$$v_1 = \frac{x}{e^t - 1}, \quad v_2 = \frac{y}{e^{-t} + 1}.$$

Notre système admet donc une congruence de trajectoires communes avec le système

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dy}{dt},$$

et cela pour l'expression des vitesses

$$v_1 = \frac{x}{e^t - 1}, \quad v_2 = \frac{y}{e^{-t} + 1}.$$

Si nous désignons par $V(z)$ et $U(z)$ les équations

$$V(z) = \frac{x}{e^t - 1} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{y}{e^{-t} + 1} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t} = 0,$$

$$U(z) = \frac{x}{1 - e^{-t}} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{y}{1 + e^t} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t} = 0,$$

on vérifie aisément les relations $V(u_k) = 0$, $U(v_k) = 0$ ($k = 1, 2$); ce sont des équations aux intégrales réciproques ⁽¹⁾.

Les trajectoires sont données par les équations

$$\frac{x}{1 - e^{-t}} = a_1, \quad \frac{-y}{1 + e^t} = a_2;$$

ces fonctions peuvent être considérées elles-mêmes comme les vitesses d'un mouvement exprimé par la loi

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{dy}{dt};$$

c'est le mouvement réciproque dont les trajectoires sont

$$\frac{x}{e^{-t} - 1} = b_1, \quad \frac{y}{e^{-t} + 1} = b_2.$$

Les deux congruences de courbes admettent une famille de surfaces communes

$$a_1 a_2 = -b_1 b_2;$$

⁽¹⁾ Ces équations sont des plus simples que nous ayons étudiées; les v_1 et v_2 sont des intégrales du système

$$\frac{D^2(X, Y)}{D^2(y, z)} = \frac{D^2(X, Y)}{D^2(z, x)} = \frac{D^2(X, Y)}{D^2(x, y)} = 1$$

et u_1, u_2 du système

$$\frac{D^2(X, Y)}{D^2(y, z)} = \frac{D^2(X, Y)}{D^2(z, x)} = \frac{D^2(X, Y)}{D^2(x, y)} = 1.$$

l'expression de ces surfaces sera donc

$$\frac{xy}{(1 - e^{-t})(1 + e^t)} = k,$$

ou

$$\frac{2xy}{\text{sh } t} = k.$$

Les trajectoires géométriques du mouvement primitif seront

$$\left(\frac{x}{a_1} - 1\right)\left(\frac{y}{a_2} + 1\right) = 1;$$

ce sont des courbes de translation pour $a_1 a_2 = k$; elles dérivent par la translation de l'hyperbole $xy = k$ sur l'une des courbes de vitesses égales

$$\left(\frac{x}{b_1} + 1\right)\left(\frac{y}{b_2} - 1\right) = 1,$$

où l'on a pris

$$b_1 b_2 = -k;$$

ces dernières courbes sont elles-mêmes de translation sur les premières pour une valeur donnée de k .

b_1, b_2 expriment les vitesses en un point de rencontre et a_1, a_2 expriment les vitesses du mouvement réciproque.

La surface $2xy = k \text{ sh } t$ a des propriétés curieuses : elle est d'abord de translation, elle admet quatre séries de courbes qui se projettent sur le plan xy suivant des hyperboles d'asymptotes parallèles aux axes, deux séries d'hyperboles égales qui proviennent de la translation des hyperboles $xy = \pm k$ et aussi deux séries d'hyperboles homothétiques et symétriques qui correspondent pour $\text{sh } t = \pm c$, c étant une constante.

Maintenant que nous avons les intégrales qui correspondent à des forces fonctions de vitesses, nous pouvons intégrer complètement le système donné. On aura pour l'intégrale générale

$$\begin{aligned} x &= c_1(1 - e^{-t}) + c_2[1 - (1 - e^{-t})\log(e^t - 1)], \\ y &= c_3(1 + e^t) + c_4[1 - (1 + e^t)\log(1 + e^{-t})]. \end{aligned}$$

Si nous profitons de la remarque faite sur les groupes qui transforment les intégrales des équations réciproques (non linéaires), nous voyons que l'on peut intégrer les systèmes de la forme

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{-X(x, y, t)}{e^{T(x, y, t)} - 1},$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{Y(x, y, t)}{e^{-T(x, y, t)} + 1},$$

X, Y, T étant des fonctions définies par une transformation telle que

$$x = \rho(K)X + a(K), \quad y = \rho(K)Y + b(K), \quad t = \rho(K)T + c(K),$$

où ρ, a, b, c sont quatre fonctions arbitraires de l'intégrale commune

$$K = \frac{XY}{\sinh T}.$$

Cas particulier des équations aux intégrales réciproques.

I. Dans l'étude précédente, nous avons laissé de côté un cas dégénéré, celui où les fonctions u_i se confondent avec les fonctions v_i .

Dans ce cas, au lieu de $2(n-1)$ équations, nous avons les $n-1$ équations non linéaires suivantes :

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(u_k) = A_1(u_1, \dots, u_{n-1}) \frac{\partial u_k}{\partial x_1} + \dots \\ \quad + A_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}) \frac{\partial u_k}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial u_k}{\partial x_n} = 0 \\ \quad (k = 1, \dots, n-1), \end{array} \right.$$

ce qui nous donne immédiatement les intégrales générales

$$F_p[x_1 - A_1(u_1, \dots, u_{n-1})x_n, \dots, x_{n-1} - A_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1})x_n, u_1, \dots, u_{n-1}] = 0$$

$$(p = 1, \dots, n-1).$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(1) \quad x_k - A_k(u_1, \dots, u_{n-1})x_n = \Phi_k(u_1, \dots, u_{n-1}),$$

$\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}$ étant des fonctions arbitraires.

Supposons qu'on ait résolu ces équations par rapport aux fonctions $u_1, \dots, u_{n-1}$ et envisageons alors l'équation

$$A(z) = 0,$$

qui sera une équation linéaire maintenant connue. Les caractéristiques de cette équation, c'est-à-dire les courbes

$$u_1(x_1, \dots, x_n) = a_1, \quad \dots, \quad u_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = a_{n-1},$$

représentent une congruence de droites, parallèles en chaque point à la direction

$$A_1(a_1, \dots, a_{n-1}), \quad \dots, \quad A_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}), \quad 1;$$

m intégrales quelconques

$$\varphi_1(u_1, \dots, u_{n-1}) = c_1, \quad \dots, \quad \varphi_m(u_1, \dots, u_{n-1}) = c_m$$

nous représentent une surface réglée à $n - m$ dimensions.

L'intérêt de cette question n'est pas dans l'intégration que nous avons faite du système (A); mais il réside dans le théorème suivant :

Une expression de la forme

$$(2) \quad \begin{aligned} & P_1(u_1, \dots, u_{n-1}) dx_1 + \dots \\ & + P_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}) dx_{n-1} + P_n(u_1, \dots, u_{n-1}) dx_n \end{aligned}$$

ne peut être une différentielle exacte que si $u_1, \dots, u_{n-1}$ sont des solutions d'une équation de la forme (A).

En effet, supposons que l'on ait

$$(3) \quad \frac{\partial P_i}{\partial x_k} = \frac{\partial P_k}{\partial x_i} \quad (i, k = 1, \dots, n);$$

P.

on peut considérer P_n exprimé en fonction de $P_1, \dots, P_{n-1}$ et l'on peut écrire

$$\frac{\partial P_k}{\partial x_n} = \frac{P \partial_n}{\partial P_1} \frac{\partial P_1}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial P_n}{\partial P_{n-1}} \frac{\partial P_{n-1}}{\partial x_k},$$

ou, en vertu des relations (3),

$$(4) \quad \frac{\partial P_n}{\partial P_1} \frac{\partial P_k}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial P_n}{\partial P_{n-1}} \frac{\partial P_k}{\partial x_{n-1}} - \frac{\partial P_k}{\partial x_n} = 0.$$

Cette équation est de la forme (A), car les coefficients

$$-\frac{\partial P_n}{\partial P_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial P_n}{\partial P_{n-1}}$$

sont les mêmes quel que soit k , et ils sont fonctions des intégrales $P_1, \dots, P_{n-1}$.

L'utilité pour la Mécanique de ce théorème peut ressortir des exemples suivants :

Supposons qu'un point mobile soit assujéti à se mouvoir suivant une loi

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = X(r, z), \quad \dots,$$

les forces X, Y, Z étant fonctions seulement de la distance à l'origine r et de la cote z du point mobile.

Eh bien, dans ce cas, on peut être sûr que l'intégrale

$$dT = X(r, z) dx + Y(r, z) dy + Z(r, z) dz$$

n'existe pas. En effet, il faut que les paramètres r et z soient des intégrales d'une équation (A). Or ces paramètres définissent une congruence de cercles, tandis que les intégrales d'un système (A) définissent des congruences de droites. Il serait donc inutile pour notre exemple de chercher l'intégrale des forces vives.

On peut, par suite, énoncer ce théorème :

Quand un mobile est soumis à des forces qui dépendent d'une congruence de courbes, l'intégrale des forces vives ne peut exister que dans le cas où cette congruence est composée de droites.

Il n'en résulte pas que la réciproque soit vraie.

II. Comme les forces dépendent des paramètres qui définissent la congruence, il existe entre ces forces la relation

$$F(X, Y, Z) = 0,$$

que l'on peut appeler *surface de forces*. Elle exprime que les forces en grandeur, direction et signe sont représentées dans l'espace X, Y, Z par des vecteurs qui vont de l'origine aux points de la surface F .

Ces surfaces se traduisent par des propriétés qui lient les forces aux diverses droites de la congruence. Aussi demandons-nous quelle est la condition pour que la direction des forces soit perpendiculaire à la direction des droites.

Si nous regardons l'équation (4), nous voyons que, pour que la fonction de forces existe, il faut que les coefficients angulaires des droites soient donnés par les expressions $\frac{\partial Z}{\partial X}, \frac{\partial Z}{\partial Y}, -1$.

Si les forces sont perpendiculaires aux droites, on aura

$$X \frac{\partial Z}{\partial X} + Y \frac{\partial Z}{\partial Y} + Z = 0,$$

ce qui nous donne

$$F\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) = 0.$$

La surface de forces doit être un cône qui a le sommet à l'origine. Demandons-nous quelle doit être la condition pour que les forces soient dirigées suivant les droites de la congruence.

On doit avoir

$$\frac{\frac{\partial Z}{\partial X}}{X} = \frac{\frac{\partial Z}{\partial Y}}{Y} = \frac{-1}{Z},$$

ce qui donne l'intégrale

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = C^2$$

Les surfaces de forces sont des sphères.

TROISIÈME PARTIE.

Surfaces intégrales communes à plusieurs équations différentielles.

Les intégrales communes à deux équations formant un système complet représentent toujours une famille de surfaces à deux dimensions, que nous appellerons *surfaces intégrales communes*.

On peut aborder l'étude de ces surfaces à deux points de vue :

1° Étudier la manière dont ces surfaces sont distribuées dans leur famille (qui dépend de $n - 2$ paramètres $k_2, \dots, k_{n-1}$ dans le cas de n variables).

2° Étudier la manière dont sont distribuées sur chacune de ces surfaces les courbes que l'on obtient par leur intersection avec les deux surfaces intégrales non communes.

Dans la première Partie nous avons traité le problème de la translation. Les surfaces intégrales communes étaient des surfaces de translation.

Il est besoin ici de faire la distinction suivante : on désigne, en Géométrie, par le même nom de *surfaces de translation* des surfaces qui dérivent par la translation d'une même surface, et des surfaces dont chacune est formée par des courbes de translation. Nous désignerons ces dernières, pour les distinguer, sous le nom de *surfaces de courbes de translation*.

Les surfaces que nous avons rencontrées dans la première Partie étaient de ce dernier genre. Il nous reste à traiter le problème de la translation regardé au premier point de vue que nous avons cité. Nous démontrerons dans ce qui suit le théorème général suivant :

Si l'on a m équations formant un système complet de la forme

$$a_1^1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2^1(a_1^1, \dots, a_1^m) \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + a_{n-1}^1(a_1^1, \dots, a_1^m) \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

$$a_1^m \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2^m(a_1^1, \dots, a_1^m) \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + a_{n-1}^m(a_1^1, \dots, a_1^m) \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

les surfaces intégrales communes (à $n - m + 1$ dimensions) seront alors des surfaces de translation.

Notre théorème regarde même les surfaces qui ne sont pas formées par des courbes de translation.

Nous allons démontrer encore un intéressant théorème par rapport à la manière dont sont distribuées les caractéristiques sur les surfaces intégrales communes, savoir :

Si $k_1, \dots, k_{n-1}$ sont des intégrales communes aux deux équations

$$A(z) = a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + a_{n-1} \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

$$B(z) = b_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + b_{n-1} \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + b_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

la condition nécessaire et suffisante pour que les caractéristiques soient des courbes conjuguées sur les surfaces intégrales communes est que l'une des équations

$$A(b_1) \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + A(b_{n-1}) \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + A(b_n) \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

$$B(a_1) \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + B(a_{n-1}) \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + B(a_n) \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

admette comme intégrales $k_2, \dots, k_{n-1}$.

Ce théorème comprend comme cas particulier le cas des équations aux intégrales réciproques, car ces équations sont justement

$$A(b_i) = 0, \quad B(a_i) = 0.$$

J'ai été forcé de commencer mon étude par quelques considérations sur les systèmes complets. La théorie générale de ces systèmes est admirablement traitée dans l'excellent Ouvrage ⁽¹⁾ de M. Goursat. J'ai repris cette question par un ordre tout à fait inverse. Mon but

⁽¹⁾ *Équations aux dérivées partielles du premier ordre.*

Avec les éléments de ces déterminants formons le déterminant

$$D_{i,i} = \begin{vmatrix} x_1^1 u_1^1 & \dots & x_{n-1}^1 u_1^{n-1} & x_n^1 u_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} u_1^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} u_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} u_{n-1}^n \\ x_1^n u_1^n & \dots & x_{n-1}^n u_{n-1}^n & x_n^n u_n^n \end{vmatrix},$$

obtenu en multipliant les éléments correspondants de D et de Δ , et les déterminants

$$D_{i,i+h} = \begin{vmatrix} x_1^1 u_1^{1+h} & \dots & x_{n-1}^1 u_1^{n-1+h} & x_n^1 u_1^{n+h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} u_{n-1}^{1+h} & \dots & x_{n-1}^{n-1} u_{n-1}^{n-1+h} & x_n^{n-1} u_{n-1}^{n+h} \\ x_1^n u_n^{1+h} & \dots & x_{n-1}^n u_{n-1}^{n-1+h} & x_n^n u_n^{n+h} \end{vmatrix}$$

$$[(k+h=h) \text{ pour } (k+h > n)],$$

obtenus en multipliant la colonne de rang i de D avec la colonne de rang $i+h$ de Δ . On considère $i+h=h$ si $i+h$ est plus grand que n .

Ces déterminants jouissent des propriétés suivantes :

La somme des termes qui sont dans une même colonne, ou sur une même ligne du déterminant $D_{i,i}$, est égale à l'unité.

On a ainsi $2n$ relations entre les éléments des déterminants D et Δ .

La somme des termes qui sont soit dans une même colonne, soit sur une même ligne de chaque déterminant $D_{i,i+h}$, est égale à zéro.

On a encore $2n(n-1)$ relations entre les éléments de D et Δ .

Pour établir ces faits, dérivons par rapport à $x_1, \dots, x_n$ chacune des expressions (1). On aura

$$(2) \begin{cases} 1 = x_1^1 u_1^i + x_2^1 u_2^i + \dots + x_n^1 u_n^i \\ 0 = x_1^1 u_1^{i+h} + x_2^1 u_2^{i+h} + \dots + x_n^1 u_n^{i+h} \end{cases} \quad (i=1, \dots, n; h=1, \dots, n).$$

Nous avons démontré le théorème relatif aux colonnes de nos déterminants; pour le démontrer par rapport aux lignes, résolvons ces

$X_k(z)$ admettent comme intégrales communes les fonctions $u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_n$.

3° On a toujours

$$(5) \quad X_i[X_h(z)] - X_h[X_i(z)] = 0.$$

En effet,

$$\underline{X_i[X_k(z)]} - X_k[X_i(z)] = \sum_h [X_i(x_h^k) - X_k(x_h^i)] p_h.$$

Or, remarquons que, d'après la définition même des opérations X, on a

$$X_i(z) = \frac{\partial x_1}{\partial u_i} \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial x_n}{\partial u_i} \frac{\partial z}{\partial x_n} = \frac{\partial z}{\partial u_i}.$$

Donc

$$X_i(x_h^k) - X_k(x_h^i) = \frac{\partial^2 X_h}{\partial u_k \partial u_i} - \frac{\partial^2 X_h}{\partial u_i \partial u_k}.$$

Nous dirons que les équations $X_1(z), \dots, X_m(z)$ forment un système en involution.

III. Par définition, appelons *système complet* un système formé par m combinaisons linéaires distinctes des équations (4).

Ainsi, par exemple, le système

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_1 = \lambda_1^1 X_1 + \dots + \lambda_m^1 X_m, \\ \vdots \\ Y_m = \lambda_1^m X_1 + \dots + \lambda_m^m X_m, \end{array} \right.$$

où les λ sont des fonctions de $x_1, \dots, x_n$, sera un système complet si l'on a

$$|\lambda_1^1, \dots, \lambda_m^m| \neq 0.$$

Il est évident qu'un système complet de m équations à n variables admettra $n - m$ intégrales communes.

Il est aussi évident que m combinaisons linéaires des m équations formant un système complet nous donneront aussi un système complet admettant les mêmes intégrales communes.

Ainsi, si l'on fait le changement

$$v_1 = \varphi_1(u_1, \dots, u_m), \quad \dots, \quad v_m = \varphi_m(u_1, \dots, u_m)$$

et si l'on considère le système

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= \xi_1^1 p_1 + \dots + \xi_n^1 p_n, \\ &\dots\dots\dots, \\ \Xi_m &= \xi_1^m p_1 + \dots + \xi_n^m p_n, \end{aligned}$$

où l'on a mis

$$\xi_i^k = \frac{\partial x_i}{\partial v_k},$$

on peut remplacer le système $X_1, \dots, X_m$, à partir duquel nous avons formé le système $Y_1, \dots, Y_m$, par le système équivalent $\Xi_1, \dots, \Xi_m$ défini par les relations

$$\begin{aligned} X_1 &= \Xi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} + \dots + \Xi_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial u_1}, \\ X_m &= \Xi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_m} + \dots + \Xi_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial u_m}, \end{aligned}$$

où l'on suppose

$$\frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(u_1, \dots, u_m)} \neq 0.$$

V. Considérons le changement de variables particulier

$$(9) \quad \begin{cases} x_1 = X_1(u_1, u_{m+1}, \dots, u_n), \\ \dots\dots\dots, \\ x_m = X_m(u_m, u_{m+1}, \dots, u_n), \\ x_{m+1} = X_{m+1}(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n), \\ \dots\dots\dots, \\ x_n = X_n(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n). \end{cases}$$

Le système en involution correspondant sera de la forme

$$(10) \quad \begin{cases} x_1^1 p_1 + x_{m+1}^1 p_{m+1} + \dots + x_n^1 p_n = 0, \\ x_1^m p_m + x_{m+1}^m p_{m+1} + \dots + x_n^m p_n = 0. \end{cases}$$

Il est résolu par rapport aux quantités $p_1, \dots, p_m$; nous avons obtenu ce qu'on appelle les *systèmes jacobiens*.

Applications.

VI. Comme applications, nous allons remarquer que le fait qu'un système complet

$$\begin{aligned} Y_1 &= y_1^1 p_1 + \dots + y_n^1 p_n, \\ &\dots\dots\dots, \\ Y_m &= y_1^m p_1 + \dots + y_n^m p_n \end{aligned}$$

admet $n - m$ intégrales communes $u_{m+1}, \dots, u_n$, exprime que les systèmes d'équations

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{y_1^1} &= \dots = \frac{dx_n}{y_n^1}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{dx_1}{y_1^m} &= \dots = \frac{dx_n}{y_n^m} \end{aligned}$$

admettent une famille de surfaces intégrales communes, ou de multiplicités, à m dimensions dans l'espace à n variables,

$$k_{m+1} = u_{m+1}, \quad \dots, \quad k_n = u_n.$$

Ces surfaces dépendent de $n - m$ paramètres $k_{m+1}, \dots, k_n$.

On peut étudier les systèmes complets par rapport aux propriétés dont jouissent ces surfaces, et surtout au point de vue des rapports qui existent entre ces surfaces et les surfaces

$$k_1 = u_1, \quad \dots, \quad k_m = u_m.$$

VII. *Multiplicités orthogonales*. — Ainsi, par exemple, cherchons quelle est la condition pour que ces deux séries de surfaces soient orthogonales.

miner les surfaces $u = u_2(x, y, z)$ qui donnent avec les premières des trajectoires orthogonales à une troisième famille de surfaces.

On n'aura qu'à chercher une intégrale commune des équations (12)' linéaires en p, q, r, s, t . On pourrait également tâcher d'intégrer l'équation

$$(13) \quad \frac{U_1(p_2) - U_2(p_1)}{p_2 - p_1} = \frac{U_1(q_2) - U_2(q_1)}{q_2 - q_1},$$

qui est une équation de Laplace.

VIII. *Multiplicité de translation.* — Je vais maintenant chercher quels sont les systèmes complets dont les surfaces intégrales communes sont des surfaces de translation.

Je prendrai le cas de trois variables. Supposons que le système de deux équations

$$(14) \quad \begin{cases} U(f) = u_1 \frac{\partial f}{\partial x} + u_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}, \\ V(f) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x} + v_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases}$$

satisfait à la condition. Alors les surfaces intégrales communes pourront se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} x &= f_1(u, v) + \varphi_1(k), \\ y &= f_2(u, v) + \varphi_2(k), \\ z &= f_3(u, v) + \varphi_3(k), \end{aligned}$$

où la fonction $k(x, y, z)$ déduite de ces équations est l'intégrale commune du système (14), u est l'intégrale de l'équation $V(f) = 0$ et v l'intégrale de l'équation $U(f) = 0$, sans que l'une de ces intégrales appartienne à l'autre équation.

Conformément à la définition que nous avons donnée des systèmes complets, nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial f_1}{\partial u}}{u_1} &= \frac{\frac{\partial f_2}{\partial u}}{u_2} = \frac{\frac{\partial f_3}{\partial u}}{1}, \\ \frac{\frac{\partial f_1}{\partial v}}{v_1} &= \frac{\frac{\partial f_2}{\partial v}}{v_2} = \frac{\frac{\partial f_3}{\partial v}}{1}. \end{aligned}$$

Nous voyons que $u_1, u_2; v_1, v_2$ ne dépendent pas de K ; ils dépendent alors seulement de deux variables u et v ; on aura donc

$$v_1 = v_1(u_1, u_2); \quad v_2 = v_2(u_1, u_2).$$

Il s'ensuit que tout système complet de la forme

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 \frac{\partial f}{\partial x} + u_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \\ v_1(u_1, u_2) \frac{\partial f}{\partial x} + v_2(u_1, u_2) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

admettra, comme famille de surfaces intégrales communes, des surfaces de translation.

IX. Nous avons vu comment, étant donnée l'expression de ces surfaces, on peut former le système complet correspondant.

Un problème plus difficile serait le suivant :

Étant donné un système de deux équations, vérifier si l'on se trouve dans les conditions du problème et intégrer même le système de deux équations dans ce cas.

Pour résoudre la question je m'appuierai sur ce fait : que chacune des équations $U(f)$ et $V(f)$ admet une intégrale fonction de ses coefficients.

En effet, u_1 et u_2 étant des fonctions de u et de v , on aura, en éliminant u ,

$$v = \lambda(u_1, u_2),$$

qui est une intégrale de l'équation U .

On aura aussi

$$u = \mu(v_1, v_2),$$

qui est une intégrale de l'équation V .

Supposons maintenant, qu'on nous donne deux équations aux dérivées partielles; il s'agit de voir si elles admettent une famille de surfaces intégrales communes de translation.

Il faut d'abord que les coefficients de l'une des équations soient

fonctions des coefficients de l'autre; il faut ensuite que le système soit complet. En désignant par $u_1, u_2; v_1, v_2$ les coefficients des deux équations, cette dernière condition se vérifie facilement avec l'identité

$$(16) \quad \frac{U(v_1) - V(u_1)}{v_1 - u_1} = \frac{U(v_2) - V(u_2)}{v_2 - u_2}.$$

Maintenant, l'intégrale commune se trouvera en cherchant un facteur intégrant ρ de l'expression

$$(17) \quad dk = \rho[(u_2 - v_2)dx + (u_1 - v_1)dy + (u_1v_2 - v_2u_1)dz].$$

La recherche de ce facteur intégrant (qui existe toujours) se réduit seulement à l'intégration de deux équations ordinaires à deux variables, grâce à la remarque que chacune des équations données admet une intégrale fonction de ses coefficients.

Il faudra chercher deux fonctions $\lambda(u_1, u_2)$ et $\mu(v_1, v_2)$ telles qu'on ait

$$U(u_1) \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} + U(u_2) \frac{\partial \lambda}{\partial u_2} = 0,$$

$$V(v_1) \frac{\partial \mu}{\partial v_1} + V(v_2) \frac{\partial \mu}{\partial v_2} = 0.$$

Considérons l'équation

$$\frac{du_1}{du_2} = \frac{U(u_1)}{U(u_2)},$$

si l'on remplace, dans le second membre, x et y par leurs valeurs en fonction de u_1, u_2 et z tirées des coefficients de l'équation U , alors z disparaîtra, et nous obtiendrons une équation différentielle ordinaire. Soit $\lambda(u_1, u_2) = V$ une intégrale de cette équation; on aura *sans aucune quadrature* une intégrale de l'équation

$$\frac{dv_1}{dv_2} = \frac{V(v_1)}{V(v_2)}$$

en éliminant V entre les coefficients u_1 et u_2 .

Pour intégrer complètement les équations $U(f)$ et $V(f)$ il nous reste maintenant à trouver pour chacune d'elles une seconde intégrale. Nous chercherons leur intégrale commune k .

relations

$$\begin{aligned} \frac{a_1^1}{f_1^1} = \dots = \frac{a_{n-1}^1}{f_{n-1}^1} = \frac{1}{f_n^1} \\ \dots\dots\dots \left(f_i^k = \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \right) \\ \frac{a_1^m}{f_1^m} = \dots = \frac{a_{n-1}^m}{f_{n-1}^m} = \frac{1}{f_n^m} \end{aligned}$$

Or, les f et leurs dérivées ne dépendent que des $u_1, \dots, u_m$; il en résulte qu'entre les $(n-1)m$ coefficients a_i^k il n'y en aura que m indépendants; tous les autres s'exprimeront en fonction de m d'entre eux, soit $a_1^1, \dots, a_1^m$.

Ainsi nous pouvons énoncer ce théorème, que : *tout système complet de la forme*

$$(19) \quad \begin{cases} a_1^1 p_1 + a_2^1(a_1^1, \dots, a_1^m) p_2 + \dots + a_{n-1}^1(a_1^1, \dots, a_1^m) p_{n-1} + p_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_1^m p_1 + a_2^m(a_1^1, \dots, a_1^m) p_2 + \dots + a_{n-1}^m(a_1^1, \dots, a_1^m) p_{n-1} + p_n = 0 \end{cases}$$

représente une multiplicité de translation.

Cas particulier des équations aux intégrales réciproques.

XI. La question que nous venons de traiter est en étroite liaison avec celle des intégrales réciproques. Elle nous donne la solution du cas, que nous avons laissé de côté, où tous les déterminants

$$\frac{D(u_1, \dots, u_{n-1})}{D(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)}$$

sont nuls, c'est-à-dire où le système de coefficients d'une équation ne constitue pas le système *fondamental* d'intégrales de l'autre équation; ou, en d'autres termes, on se propose de déterminer deux équations aux intégrales réciproques par des relations existant entre les coefficients d'une même équation.

Proposons-nous ce problème pour le cas de trois variables; le cas de n variables se traite de la même façon.

Nous avons établi que les surfaces intégrales communes aux équations

tions à intégrales réciproques sont des surfaces de courbes de translation, dans ce sens que les caractéristiques des équations considérées se distribuent sur ces surfaces suivant des courbes de translation et que, par conséquent, elles s'expriment sous la forme

$$\begin{aligned}x &= f_1(u, k) + \varphi_1(v, k), \\y &= f_2(u, k) + \varphi_2(v, k), \\z &= f_3(u, k) + \varphi_3(v, k).\end{aligned}$$

Demandons-nous dans quel cas ces surfaces seront elles-mêmes de translation dans leur famille.

Alors ces surfaces $k(x, y, z)$ pourront se mettre sous la forme

$$(20) \quad \begin{cases} x = f_1(u) + \varphi_1(v) + \psi_1(k), \\ y = f_2(u) + \varphi_2(v) + \psi_2(k), \\ z = f_3(u) + \varphi_3(v) + \psi_3(k) \end{cases}$$

et nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{u_1}{f'_1} &= \frac{u_2}{f'_2} = \frac{1}{f'_3}, \\ \frac{v_1}{\varphi'_1} &= \frac{v_2}{\varphi'_2} = \frac{1}{\varphi'_3}.\end{aligned}$$

Nous voyons alors que les équations différentielles se présentent sous la forme

$$(21) \quad \begin{cases} u_1 \frac{\partial t}{\partial x} + u_2(u_1) \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial z} = 0, \\ v_1 \frac{\partial t}{\partial x} + v_2(v_1) \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire d'un système complet dont les coefficients sont fonctions seulement de deux d'entre eux; nous sommes dans le cas du problème précédent où les intégrales communes représentent des surfaces de translation, mais nous sommes dans un cas particulier, celui dont les coefficients d'une équation sont les intégrales de l'autre, c'est-à-dire que les caractéristiques sont, sur ces surfaces, des courbes de translation.

XII. Prenons un exemple simple.

Considérons les équations

$$\frac{\partial t}{\partial x} + f'(x+z) \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} + \varphi'(x-z) \frac{\partial t}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial z} = 0.$$

C'est un système complet, ainsi qu'on le voit de suite. Il est constitué par des équations aux intégrales réciproques et, comme les coefficients ne dépendent que de deux fonctions, les surfaces intégrales communes seront de translation.

Ces surfaces se trouvent immédiatement en cherchant un facteur intégrant de l'expression

$$[\varphi'(x-z) + f'(x+z)] dx - 2dy + [-\varphi'(x-z) + f'(x+z)] dz.$$

Cette expression est déjà intégrable, les surfaces demandées seront

$$k = \varphi(x-z) - 2y + f(z+x);$$

ce sont justement des surfaces de la nature indiquée. On a

$$2x = u + v,$$

$$2y = f(u) + \varphi(v) + k,$$

$$2z = u - v.$$

L'exemple donné est des plus simples possibles; mais des équations plus générales pourront s'intégrer par les méthodes que nous avons indiquées.

XIII. Nous pouvons également reprendre le cas des équations aux intégrales réciproques, où il existe une relation entre les u seulement. Ainsi proposons-nous de résoudre le problème suivant :

Intégrer le système

$$(22) \quad \begin{cases} u \frac{\partial v_1}{\partial x} + \varphi(u) \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0, \\ u \frac{\partial v_2}{\partial x} + \varphi(u) \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad v_1 \frac{\partial u}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

avec trois inconnues v_1, v_2, u .

En vertu de ce que nous avons dit jusqu'à présent, il résulte que les surfaces intégrales communes $k(x, y, z)$ des équations auxiliaires

$$u \frac{\partial k}{\partial x} + \varphi(u) \frac{\partial k}{\partial y} + \frac{\partial k}{\partial z} = 0, \quad v_1 \frac{\partial k}{\partial x} + v_2 \frac{\partial k}{\partial y} + \frac{\partial k}{\partial z} = 0$$

se présentent sous la forme la plus générale :

$$(23) \quad \begin{cases} x = f_1(u_1) \rho(k) + \varphi_1(v, k), \\ y = f_2(u_1) \rho(k) + \varphi_2(v, k), \\ z = f_3(u_1) \rho(k) + \varphi_3(v, k). \end{cases}$$

v et k peuvent être considérées comme des fonctions arbitraires de v_1 et v_2 ; quant à f_1, f_2 et f_3 , ils doivent être liés par la relation

$$\frac{f'_2}{f'_3} = \varphi \left(\frac{f'_1}{f'_3} \right).$$

Supposons les équations (23) résolues par rapport à u, v et k . On aura pour nos inconnues

$$u = \frac{f'_1(u_1)}{f'_3(u_1)}, \quad v_1 = \frac{\varphi'_1(v)}{\varphi'_3(v)}, \quad v_2 = \frac{\varphi'_2(v)}{\varphi'_3(v)}.$$

Les équations (23) expriment que toutes les surfaces

$$k(x, y, z) = \text{const.}$$

sont des surfaces de courbes de translation, mais qu'une série de ces courbes $u_1 = \text{const.}$ dérive par homothétie d'une seule courbe

$$x = f_1(u_1), \quad y = f_2(u_1), \quad z = f_3(u_1).$$

On pourrait s'exprimer en ces termes que, lorsqu'il y a une liaison entre u_1 et u_2 , on passe d'une surface intégrale commune k_0 à une autre k_1 par une dilatation suivant les courbes u après une translation suivant les courbes v [la dilatation sera $\rho(k_1) - \rho(k_0)$ et la translation $\varphi_i(v, k_1) - \varphi_i(v, k_0)$].

On peut aussi voir que, lorsqu'il existe encore une relation $v_2 = \psi(v_1)$,

c'est-à-dire

$$\frac{\partial x_i}{\partial u} = \alpha a_i, \quad \frac{\partial x_i}{\partial v} = \beta b_i.$$

On aura

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} = \frac{\partial(\alpha a_i)}{\partial x_1} \beta b_1 + \dots + \frac{\partial(\alpha a_i)}{\partial x_n} \beta b_n$$

ou

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} = \beta B(\alpha a_i)$$

et aussi

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial v \partial u} = \alpha A(\beta b_i).$$

Développons la première relation

$$(25) \quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} = \beta \alpha [B(a_i)] + \beta B(\alpha) a_i.$$

Si nous formons les expressions

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} \frac{\partial k_j}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial^2 x_n}{\partial u \partial v} \frac{\partial k_j}{\partial x_n} \quad (j = 2, \dots, n-1),$$

nous aurons, en vertu des équations (21) et (22),

$$\beta \alpha \left[B(a_1) \frac{\partial k_j}{\partial x_1} + \dots + B(a_n) \frac{\partial k_j}{\partial x_n} \right] = [\lambda \alpha - \beta B(\alpha)] A(k_j) + \mu \beta B(k_j);$$

or

$$A(k_j) = B(k_j) = 0.$$

Donc, les fonctions $k_2, \dots, k_{n-1}$ seront des intégrales communes aux équations A, B et à l'équation

$$\mathfrak{B}(z) = B(a_1) p_1 + \dots + B(a_n) p_n = 0;$$

elles seront aussi des intégrales communes avec l'équation

$$\mathfrak{A}(z) = A(b_1) p_1 + \dots + A(b_n) p_n = 0,$$

car les expressions

$$\beta B(\alpha a_i) = \alpha A(\beta b_i)$$

nous donnent

$$\mathfrak{A}(z) - \mathfrak{B}(z) = \frac{1}{\alpha} B(\alpha) A(z) - \frac{1}{\beta} A(\beta) B(z).$$

XV. Nous avons obtenu le moyen de reconnaître si les caractéristiques sont des lignes conjuguées sur les surfaces intégrales communes, quand on connaît ces intégrales; il est intéressant de reconnaître ce fait *sans qu'il soit besoin d'intégrer le système complet*.

Pour cela nous remarquons que les équations $\mathfrak{A}(z)$ et $\mathfrak{B}(z)$ admettent les $n - 2$ intégrales communes des équations $A(z)$ et $B(z)$.

On aura donc

$$(26) \quad B(a_i) = \beta_1 a_i + \beta_2 a_i, \quad A(b_i) = \alpha_1 a_i + \alpha_2 b_i.$$

En éliminant les quantités $\beta_1, \beta_2; \alpha_1, \alpha_2$, les conditions cherchées s'expriment par le fait que tous les déterminants

$$D_{i,k,h} = \begin{vmatrix} A(b_i) & a_i & b_i \\ A(b_k) & a_k & b_k \\ A(b_h) & a_h & b_h \end{vmatrix}, \quad \Delta_{i,k,h} = \begin{vmatrix} B(a_i) & a_i & b_i \\ B(a_k) & a_k & b_k \\ B(a_h) & a_h & b_h \end{vmatrix}$$

sont nuls. On aura $2 \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ conditions; mais elles se réduisent à $2(n-3)$ conditions distinctes. Ces relations contiennent aussi la condition que les équations $A(z)$ et $B(z)$ forment un système complet, car cette condition s'exprime, comme il est aisé de le voir, par les relations

$$\begin{vmatrix} A(b_i) - B(a_i) & a_i & b_i \\ A(b_k) - B(a_k) & a_k & b_k \\ A(b_h) - B(a_h) & a_h & b_h \end{vmatrix} = 0 \quad (i, k, h = 1, \dots, n).$$

Si l'on veut que les caractéristiques soient des lignes de courbure, il suffit d'ajouter la condition

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = 0.$$

La recherche de l'intégrale commune se réduit dans le cas $n = 3$ à

l'intégration d'une équation à deux variables; ainsi, si l'on rend

$$a_n = b_n = 1,$$

les surfaces sur lesquelles les deux congruences de caractéristiques sont conjuguées seront données par l'intégrale de l'équation

$$A(b_1) \frac{\partial F}{\partial x} + A(b_2) \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

où l'on regarde z comme un paramètre.

Équations conjuguées.

XVI. Parmi les résultats précédents nous avons trouvé celui-ci :

Si l'on a deux équations

$$A(z) = \sum a_i \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad B(z) = \sum b_i \frac{\partial z}{\partial x_i}$$

qui vérifient les conditions

$$(27) \quad \begin{cases} A(z) = \alpha_1 A(z) + \alpha_2 B(z), \\ B(z) = \beta_1 A(z) + \beta_2 B(z) \end{cases}$$

où

$$A(z) = \sum A(b_i) \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad B(z) = \sum B(a_i) \frac{\partial z}{\partial x_i},$$

les deux équations $A(z)$ et $B(z)$ admettent une famille de surfaces intégrales communes sur lesquelles les deux congruences de caractéristiques tracent des lignes conjuguées.

Nous appellerons les équations $A(z)$ et $B(z)$ *équations conjuguées*. Comme deux combinaisons linéaires d'un système complet donnent encore un système complet, il est à se demander si la même chose n'arrive pas pour les systèmes conjugués.

Soient

$$M(z) = PA(z) + QB(z), \quad N(z) = RA(z) + SB(z)$$

P.

9

deux combinaisons linéaires à deux équations conjuguées.

On a

$$M(z) = \sum (P a_k + Q b_k) \frac{\partial z}{\partial x_k} = \sum m_k \frac{\partial z}{\partial x_k},$$

$$N(z) = \sum (R a_k + S b_k) \frac{\partial z}{\partial x_k} = \sum n_k \frac{\partial z}{\partial x_k}.$$

Il faut qu'on ait

$$\mathfrak{M}(z) = \sum M(m_k) \frac{\partial z}{\partial x_k} = m_1 M(z) + m_2 N(z),$$

$$\mathfrak{N}(z) = \sum N(m_k) \frac{\partial z}{\partial x_k} = n_1 M(z) + n_2 N(z).$$

Or, on peut écrire

$$M(m_k) = a_k M(R) + b_k M(S) + R M(a_k) + S M(b_k),$$

$$N(m_k) = a_k N(P) + b_k N(S) + P N(a_k) + Q N(b_k).$$

Les deux premiers termes de chacune de ces expressions sont des combinaisons linéaires de a_k et b_k ; pour que nos équations soient conjuguées, il faut qu'on ait

$$R M(a_k) + S M(b_k) = \mu_1 a_k + \mu_2 b_k,$$

$$P N(a_k) + Q N(b_k) = \nu_1 a_k + \nu_2 b_k.$$

Or, on a

$$\begin{array}{l|l} M(a_k) = P A(a_k) + Q B(a_k) & N(a_k) = R A(a_k) + S B(a_k) \\ M(b_k) = P A(b_k) + Q B(b_k) & N(b_k) = R A(b_k) + S B(b_k) \end{array}$$

Si, maintenant, nous formons les combinaisons précédentes, et que nous tenions compte du fait que $A(b_k)$ et $B(a_k)$ sont chacune des combinaisons linéaires de a_k et b_k , nous obtenons pour les deux équations la seule condition

$$(28) \quad P R A(a_k) + Q S B(b_k) = \rho_1 a_k + \rho_2 b_k.$$

Ces relations doivent être satisfaites quel que soit k . Elles doivent être compatibles par rapport aux inconnues P, R, Q, S, ρ_1 et ρ_2 .

Nous voyons que le problème n'admet pas de solutions quelles que soient P, Q, R et S, ce qui revient à dire :

Deux combinaisons linéaires à deux équations conjuguées ne donnent pas toujours deux nouvelles équations conjuguées.

Pour le cas de trois variables, le problème est toujours possible, car les trois équations (25) nous donnent des solutions déterminées en $\frac{PR}{\rho_2}$, $\frac{QS}{\rho_2}$ et $\frac{\rho_1}{\rho_2}$, et l'on pourra prendre arbitrairement trois des coefficients P, Q, R, S. On peut donc énoncer ce théorème :

Dans le cas de trois variables, on peut toujours, d'un système conjugué, déduire par des combinaisons linéaires de nouveaux systèmes conjugués; le problème dépend de trois coefficients arbitraires.

Dans le cas de n variables, pour que le problème soit possible, il faut que tous les déterminants

$$(29) \quad \begin{vmatrix} A(a_i) & B(b_i) & a_i & b_i \\ A(a_j) & B(b_j) & a_j & b_j \\ A(a_k) & B(b_k) & a_k & b_k \\ A(a_l) & B(b_l) & a_l & b_l \end{vmatrix} \quad (i, j, k, l = 1, \dots, n)$$

soient nuls, ce qui nous donne n — 3 conditions distinctes.

XVII. Il est à remarquer que, par cette transformation, les surfaces intégrales communes restent les mêmes, par le fait que M(z) et N(z) sont des combinaisons linéaires de A(z) et B(z), mais les systèmes conjugués changent. Au lieu d'avoir les deux congruences de caractéristiques

$$\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{a_i}{a_n}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial x_n} = \frac{b_i}{b_n},$$

nous aurons les deux congruences de caractéristiques aussi conjuguées

$$\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{P a_i + Q b_i}{P a_n + Q b_n}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial x_n} = \frac{R a_i + S b_i}{R a_n + S b_n},$$

où P, Q, R, S sont liées conformément aux équations (28) par la relation

$$\frac{PR}{QS} = \Delta, \quad \Delta = - \frac{|B(b_k) a_k b_k|}{|A(a_k) a_k b_k|}.$$

En particulier, si l'on fait $a_n = b_n = 1$, on a

$$(30) \quad \frac{dx_i}{dx_n} = pa_i + (1-p)b_i, \quad \frac{\partial x_i}{\partial x_n} = ra_i + (1-r)b_i$$

pour tous les systèmes conjugués qui correspondent à une même série de surfaces, à condition que p et r soient liés par la relation (1)

$$(31) \quad \frac{pr}{(1-p)(1-r)} = \Delta.$$

Il existe deux valeurs $p = r$ pour lesquelles les deux équations conjuguées se confondent. Elles sont

$$p = \frac{\pm \Delta}{1 \pm \Delta};$$

nous obtenons ainsi deux congruences de lignes asymptotiques.

Pour les surfaces réglées, ces lignes deviennent illusoires, car Δ est indéterminé.

Cette expression Δ est la même pour toutes les congruences d'un système complet donné. Nous pourrions l'appeler *invariant conjugué du système*.

Les congruences des lignes de courbure seront enfin données par les équations (27), qui correspondent à celles des valeurs de p et r qui sont les solutions de l'équation (31) et de la suivante :

$$\sum_i [pa_i + (1-p)b_i][ra_i + (1-r)b_i] = 0.$$

(1) Ici Δ se transforme en $-\frac{|B(b_k) a_k - b_k|}{|A(a_k) a_k - b_k|}$, car on a, dans la dernière des équations (28),

$$A(a_n) = B(b_n) = 0,$$

ce qui donne

$$\rho_1 = -\rho_2.$$

Intégration des équations conjuguées.

XVIII. Reprenons les $2n$ équations aux dérivées partielles non linéaires

$$A(b_i) = a_1 \frac{\partial b_i}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial b_i}{\partial x_n} = \alpha_1 a_i + \alpha_2 b_i,$$

$$B(a_i) = b_1 \frac{\partial a_i}{\partial x_1} + \dots + b_n \frac{\partial a_i}{\partial x_n} = \beta_1 a_i + \alpha_2 b_i.$$

Nous avons vu qu'elles déterminent tous les systèmes conjugués. Ils dépendent de quatre fonctions arbitraires $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2$ et des fonctions arbitraires de l'intégration.

Nous avons intégré le cas

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0,$$

c'est-à-dire celui des équations aux intégrales réciproques. Les caractéristiques étaient des courbes de translation; d'où il résulte que les courbes de translation sont des courbes conjuguées sur les surfaces intégrales communes.

Prenons le cas

$$A(b_i) = \alpha b_i, \quad \beta(a_i) = \beta a_i,$$

qui est en apparence plus général. Ce cas se réduit à celui des équations aux intégrales réciproques, en divisant chaque équation par le coefficient de $\frac{\partial}{\partial x_n}$. En effet, on peut écrire

$$A\left(\frac{b_i}{b_n}\right) = \frac{b_n A(b_i) - b_i A(b_n)}{b_n^2} = 0,$$

et aussi

$$B\left(\frac{a_i}{a_n}\right) = 0.$$

Nous retrouvons les équations étudiées dans la première Partie.

Le cas général se réduit à un cas plus simple en prenant comme

inconnues $\frac{a_i}{a_n}$ et $\frac{b_i}{b_n}$. On obtient alors le système réduit

$$(32) \quad \begin{cases} A(b_i) = a_1 \frac{\partial b_i}{\partial x_1} + \dots + a_{n-1} \frac{\partial b_i}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial b_i}{\partial x_n} = \lambda(a_i - b_i), \\ B(a_i) = b_1 \frac{\partial a_i}{\partial x_1} + \dots + b_{n-1} \frac{\partial a_i}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial a_i}{\partial x_n} = \mu(a_i - b_i), \end{cases}$$

qui nous donne tous les systèmes de caractéristiques

$$dx_i = a_i dx_n, \quad \partial x_i = b_i \partial x_n,$$

qui définissent des congruences conjuguées.

XIX. Nous étudierons seulement les systèmes, d'ailleurs les plus intéressants, qui correspondent à l'une des valeurs λ ou μ égale à zéro. Soit

$$(33) \quad \begin{cases} U(v_k) = u_1 \frac{\partial v_k}{\partial x_1} + \dots + u_{n-1} \frac{\partial v_k}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial v_k}{\partial x_n} = 0, \\ V(u_k) = v_1 \frac{\partial u_k}{\partial x_1} + \dots + v_{n-1} \frac{\partial u_k}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial u_k}{\partial x_n} = a(u_k - v_k). \end{cases}$$

On peut passer du système (33) au système plus général (32) par une transformation conjuguée

$$u_i = pa_i + (1-p)b_i; \quad v_i = ra_i + (1-r)b_i,$$

p et r étant liés par la relation invariante (28), ce qui nous fait disposer encore d'une relation arbitraire entre p et r .

Considérons ainsi le système (33) de $2(n-1)$ équations non linéaires.

Si nous prenons les équations linéaires correspondant à un système de solutions u_k, v_k supposées connues, soit

$$U(z) = 0, \quad V(z) = 0,$$

ces équations forment un système complet. Par suite, quel que soit un point donné $x_1^0, \dots, x_n^0$ de l'espace, il existe une surface qui passe par

ce point et qui est commun aux deux congruences de caractéristiques, dont l'une est

$$\nu_k(x_1, \dots, x_n) = \nu_k(x_1^0, \dots, x_n^0);$$

nous désignerons l'autre par

$$u_k(x_1, \dots, x_n) = u_k(x_1^0, \dots, x_n^0).$$

Les équations $U(\nu_k) = 0$ expriment que, lorsqu'on se déplace suivant une courbe donnée $\nu_k = \text{const.} = \nu_k^0$, la tangente à toutes les courbes u_k qui la rencontrent garde une direction fixe pour les points de rencontre avec cette courbe ν .

En d'autres termes, pour la surface considérée des courbes u , la courbe ν est la ligne de contact d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la direction

$$\frac{\nu_1^0}{\sqrt{\nu_1^{0^2} + \dots + \nu_{n-1}^{0^2} + 1}}, \quad \dots, \quad \frac{\nu_{n-1}^0}{\sqrt{\nu_1^{0^2} + \dots + \nu_{n-1}^{0^2} + 1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\nu_1^{0^2} + \dots + \nu_{n-1}^{0^2} + 1}}.$$

En résumé, pour chaque système déterminé d'intégrales u_k et ν_k des équations (30), la congruence ν représente les courbes de contact des cylindres circonscrits aux surfaces intégrales communes, et la congruence u représente des courbes qui ont pour tangentes les génératrices de ces cylindres. Le système complet qui les définit satisfaisant aux équations (33), les deux séries de caractéristiques seront des courbes conjuguées.

Nous retrouvons ainsi un théorème de M. Kœnigs, qui subsiste pour le cas de n variables.

Revenons maintenant à l'intégration effective de nos équations (33).

On a

$$UV(z) - VU(z) = a[V(z) - U(z)].$$

Si nous remplaçons z par ν_k , on peut écrire

$$(34) \quad U[V(\nu_k)] = aV(\nu_k),$$

et, avec

$$U(\nu_k) = 0,$$

Nous avons ainsi obtenu $n - 1$ équations avec $n - 1$ inconnues $v_1, \dots, v_{n-1}$.

Ces équations nous donnent le système de caractéristiques

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx_1}{v_1} &= \dots = \frac{dx_{n-1}}{v_{n-1}} = dx_n \\ &= \frac{dv_1}{e^{ax_n} C_1(v_1, \dots, v_{n-1})} = \dots = \frac{dv_{n-1}}{e^{ax_n} C_{n-1}(v_1, \dots, v_{n-1})}. \end{aligned} \right.$$

Maintenant, au lieu de prendre comme fonctions arbitraires $C_1, \dots, C_{n-1}$, nous pouvons prendre arbitrairement les fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \varphi$ telles que $C_1, \dots, C_{n-1}$ soient définis par les relations

$$C_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_1} + \dots + C_{n-1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_{n-1}} = 0,$$

$$C_1 \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial v_1} + \dots + C_{n-1} \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial v_{n-1}} = 0,$$

$$C_1 \frac{\partial \varphi}{\partial v_1} + \dots + C_{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial v_{n-1}} = 1.$$

Alors le système (34) devient

$$\frac{dx_1}{v_1} = \dots = \frac{dx_{n-1}}{v_{n-1}} = dx_n = \frac{d\varphi_k}{0} = \frac{d\varphi}{e^{ax_n}}.$$

Supposons que $v_1, \dots, v_{n-1}$ soient exprimées en fonction de $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi$, ce qui revient à faire un changement de variables connu, et soit

$$v_k(x_1, \dots, x_n) = \overline{v}_k(\varphi; \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}) \quad \text{ou} \quad \overline{v}_k(\varphi).$$

On a d'abord une nouvelle intégrale

$$(38) \quad \varphi - \frac{e^{ax_n}}{a} = k.$$

Effectuons les quadratures

$$I_1 = \int_{\overline{v}_1} \left(k + \frac{e^{ax_n}}{a} \right) dx_n, \quad \dots, \quad I_{n-1} = \int_{\overline{v}_{n-1}} \left(k + \frac{e^{ax_n}}{a} \right) dx_n.$$

P. 10

Les expressions

$$\begin{aligned} x_1 - I_1 &= H_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, k), \\ &\dots\dots\dots \\ x_{n-1} - I_{n-1} &= H_{n-1}(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, k) \end{aligned}$$

nous donnent, en remplaçant k par sa valeur (35), les $n - 1$ fonctions inconnues $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$, et l'on trouve enfin $u_1, \dots, u_{n-1}$ par les relations

$$\frac{u_1}{D(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})} = \dots = \frac{u_{n-1}}{D(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})} = \frac{1}{D(x_1, \dots, x_{n-1})}.$$

Dans le cas particulier où le système conjugué constitue les deux familles de lignes de courbure, on doit avoir la relation

$$(39) \quad u_1 \varphi_1 + \dots + u_{n-1} \varphi_{n-1} + 1 = 0.$$

Considérons la première des équations (33). On remarquera que la relation (39) exprime que tout déplacement suivant une trajectoire $\varphi_i = C_i$ de l'équation $U(z) = 0$ est perpendiculaire à la droite de direction $C_1, \dots, C_{n-1}, 1$. Cela veut dire que les lignes de courbure, celles qui sont en même temps des lignes de contact des cylindres avec les surfaces intégrales communes, forment une congruence de courbes planes.

Vu et approuvé :

Paris, le 21 février 1908,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 21 février 1908,

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.

SECODE THÈSE.



PROPOSITIONS ANNÉES PAR LA FACULTÉ.

Sur la stabilité de l'équile et des mouvements.

Vu et approuvé :

Paris, le 21 février 1908,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 21 février 1908,

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉ DE PARIS,
L. LIARD

PARIS — IMPRIMERIE UTHIER-VILLARS,

40619

Quai des Grands-ustins, 55.
